MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. W. Buchholz

SoSe 2009
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung "Diskrete Strukturen"

Aufgabe 9

Sei $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $f(x_1, x_2) := (3x_1 + 2x_2, 7x_1 + 5x_2)$.

Man beweise, daß f bijektiv ist, und gebe die Umkehrabbildung f^{-1} an.

Aufgabe 10

Es sei $6\mathbb{N} := \{6n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{N}_1 := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Man beweise:

(a) Die Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^3 - x$ ist nicht injektiv und
$\mathrm{Im}(h) := \{h(x) : x \in \mathbb{N}\}$ ist eine Teilmenge von $6\mathbb{N}$.

(b) Die Abbildung $h_1 : \mathbb{N}_1 \to 6\mathbb{N}$, $h_1(x) := h(x)$ ist nicht surjektiv, aber injektiv.
Hinweis: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Aufgabe 11

Man beweise:

(a) Für jede endliche nichtleere Menge M gilt: Die Anzahl der Teilmengen von M mit gerader Mächtigkeit ist gleich der Anzahl der Teilmengen von M mit ungerader Mächtigkeit.

(b) $\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n}{3}$, falls $n \geq 3$.
Hinweis: Man betrachte die Mengen $M_k := \{X \subseteq \{1, ..., n\} : |X| = 3 \;\&\; \min(X) = k\}$

Aufgabe 12

Sei $f_{n,k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, ..., n\}$, welche kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen enthalten. Man beweise durch Induktion nach n:

(a) $f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$, falls $k \leq n$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} f_{n,k} = F_{n+2}$, wobei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen sei.

Abgabe: Dienstag, 12. 5. 2009, 18 Uhr (Übungskasten)