Bachelorarbeit
an der Ludwig-Maximilians Universität in München
Fakultät der Physik

Möglichkeit einer realistischen, relativistischen Quantenmechanik

Possibility of a realistic, relativistic Quantum Theory

Felix Hänle Matrikelnummer: 10361417

01.07.2013

Betreuer: Prof. Dr. Detlef Dürr, Prof. Dr. Lode Pollet

Möglichkeit einer realistischen, relativistischen Quantenmechanik

vorgelegt von Felix Hänle

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird auf Grundlage des Bellschen Theorems die Nichtlokalität in der Natur diskutiert und untersucht ob sich diese mit der Relativitätstheorie vereinbaren lässt.
Hiefür werden die Auswirkungen der relativistischen Raumzeit-Struktur auf die Naturbeschreibung durch quantenmechanische Wellenfunktionen betrachet und es wird besprochen was eine relativistische Theorie mindestens leisten muss. Ich gehe dafür genau darauf ein, was die wesentlichen Bausteine der Relativitätstheorie sind und im Speziellen, ob Lokalität in einer relativistischen Theorie unumgänglich ist.
Abschließend werden verschiedene Ansätze vorgestellt, die versuchen die Quantenmechanik relativistisch zu formulieren und die dabei entstehenden Probleme erläutert.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

1.1 Was bedeutet *relativistisch*? . . . 3
1.2 Was bedeutet *realistisch*? . . . 4
1.3 Quantenmechanik . . . 4
1.3.1 EPRB Argument . . . 4
1.3.2 Quantenfeldtheorie (QFT) . . . 4

2 Nichtlokalität **5**

2.1 Bells Theorem . . . 5
2.2 Test der *spukhaften Fernwirkung* . . . 9
2.3 Was ist neu an der Quantenverschränkung? . . . 10

3 Relativität und Kausalität **11**

3.1 Einsteinscher Lokalitätsgedanke . . . 11
3.2 Widerspruch? . . . 11
3.3 Raumzeitstruktur . . . 13
3.4 Überlichtgeschwindigkeit in der SRT . . . 14
3.4.1 Tachyonen . . . 14
3.4.2 Kausale Schleifen . . . 14
3.5 Kausalität in relativistsischen Quantentheorien - *lokale Vertauschbarkeit* . 15
3.5.1 Signalübertragung schneller als Licht? . . . 15
3.5.2 Notwendigkeit der *lokalen Vertauschbarkeit* . . . 18
3.6 Die Rolle der Wellenfunktion . . . 18
3.7 Kausale Verbindung . . . 19

4 Lösungsansätze und Probleme **22**

4.1 Lorentz-invariante Kollaps-Theorien . . . 22
4.1.1 Hellwig & Kraus . . . 23
4.1.2 Kollaps entlang einer bestimmten Hyperfläche . . . 24
4.1.3 Abhängigkeit von der Hyperfläche . . . 26
4.1.4 "Wellenfunktion" als Funktional . . . 27
4.2 Lorentz-Invarianz in Theorien ohne Kollaps der Wellenfunktion . . . 30
4.3 Hypersurface Bohm-Dirac Modelle (HBDM) . . . 32
4.3.1 Grundlagen . . . 32
4.3.2 Bohm-Dirac Modell . . . 32
4.3.3 Hypersurface-Bohm-Dirac Modelle (HBDM) . . . 34

5 Fazit **36**

Anhang: Singlett Zustand **37**

1 Einleitung

1.1 Was bedeutet *relativistisch*?

Zunächst muss klar sein, was gemeint ist, wenn von einer relativistischen Theorie die Rede ist. Es gibt mehrere Forderungen, die man an eine solche Theorie stellen kann und die Physiker sind sich teilweise uneinig darüber, was die Relativitätstheorie wirklich ausmacht. Manche setzen nur Lorentz-Invarianz der Theorie voraus. Diese Annahme reicht erstmal nicht aus, um zu folgern, dass die Lichtgeschwingkeit eine obere Schranke für Geschwindigkeiten ist. Andere wiederum fordern eben genau diese obere Grenze (Lichtgeschwindigkeit). Allerdings ist man sich auch hier uneinig darüber für was diese Grenze gelten soll:[5]

1. Materie/Energie
2. Signale
3. kausale Prozesse
4. Informationen

Wenn man Einsteins Konzept der lokalen Kausalität als Grundlage nimmt, also dass ausschließlich kausale Strukturen die verschieden Teile des physikalischen Universums miteinander verbinden (es gibt eine ununterbrochene Kette aus Ursachen und Wirkungen), dann sind alle Forderungen, die man stellen kann mehr oder weniger äquivalent. In der Quantenmechanik geschieht die physikalische Beschreibung der Natur durch die Wellenfunktion, sie lebt auf dem Konfigurationsraum und damit nicht in der physikalischen Welt. Dadurch werden die Dinge sehr viel komplizierter und die oben genannten Forderung bedeuten nicht mehr das Gleiche. Es ist also plötzlich nicht mehr so klar was eine *relativistische Theorie* ausmacht. Das soll im Folgenden genau untersucht werden (vgl. Kapitel 3).
Nun noch eine Begriffsklärung: Zwei Ereignisse **x,y** in der Minkowski Raumzeit $\mathcal{M}$ ($\mathbb{R}^4$ mit Minkowski Metrik $g^{\mu\nu}$) heißen raumartig getrennt, falls folgendes gilt: $x^\mu y_\mu < 0$, das heißt die beiden Ereignisse können nicht durch ein Lichtstrahl verbunden werden.[4]
In dieser Arbeit beschränkte ich mich auf das Gebiet der speziellen Relativitätstheorie, der Begriff *relativistisch* wird also auch ich diesem Sinne verwendet. In Kapitel 3 werde ich genauer darauf eingehen, was ich unter Relativität verstehe.

1.2 Was bedeutet *realistisch*?

Realismus bedeutet in der Physik, dass eine physikalische Theorie über "Etwas" in der realen Welt ist (z.B. Materie). Die Wellenfunktion ist ein wesentlicher Bestandteil der Quantenmechanik, sie ist aber nicht im physikalischen Raum, sondern auf dem Konfigurationsraum definiert. Deshalb ist der Realismus nicht automatisch in jeder Quantentheorie mit eingebaut. Die Bohmsche Mechanik ist zum Beispiel eine von Grund auf realistische Theorie, weil in ihr die Teilchenbahnen sichtbar sind. Allerdings legt erst die jeweilige Theorie die Meßbarkeit von physikalischen Größen fest.

1.3 Quantenmechanik

1.3.1 EPRB Argument

Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) haben ein Gedankenexperiment vorgestellt, mit dem sie zeigen wollten, dass die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit unvollständig sein muss. In der von David Bohm überarbeiteten Version wird ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen betrachtet. Die beiden Teilchen werden in einem speziellen Singlett-Zustand präpariert und dann raumartig voneinander getrennt. Ein Singlett-Zustand ist ein verschränkter Zustand mit Gesamt-Spin null, wobei verschränkter Zustand heißt, dass er sich nicht als Produktzustand darstellen lässt. Dann werden sie jeweils einem inhomgenen Magnetfeld ausgesetzt, das durch einen Stern-Gerlach Magneten (SGM) erzeugt wird (die beiden Magnetfelder sollen gleich orientiert sein). Die beiden Teilchen werden durch die SGMen also genau in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt.[1],[4],[10]
In Kapitel 2 werde ich auf Grundlage dieses Experiments die Nichtlokalität der Natur erklären.

1.3.2 Quantenfeldtheorie (QFT)

Nun noch eine Frage: Ist die Fragestellung nach der *Möglichkeit einer realistischen, relativistischen Quantenmechanik* überhaupt sinnvoll? Schließlich wird doch allgemein behauptet, dass man mit der QFT eine relativistische Version der Quantenmechanik gefunden wurde, die sehr gute Vorhersagen macht. Die Antwort ist Ja. Die Übergangswahrscheinlickeiten und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der QFT sind zwar Lorentz-invariant, allerdings sind das die zugrundeliegenden Zustände nicht. Das kommt durch den Reduktionsprozess der Wellenfunktion, dieser ist nicht Lorentz-invariant (das wird in Kapitel 3 und 4 ausführlich diskutiert). QFT ist also nur aus einer pragmatischen Sichtweise *relativistisch*.[4]
Ein wichtiges Axiom in der QFT ist die *lokale Vertauschbarkeit*, welche auch in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen wird. Sie sichert uns trotz der quantenmechanischen Nichtlokalität, die Unmöglichkeit von Signalübertragungen schneller als Licht (vgl. Kapitel 3).

2 Nichtlokalität

In diesem Kapitel geht es um die Nichtlokalität der Natur. Es wird sich herausstellen, dass jede Theorie, die versucht die Natur zu beschreiben nichtlokal sein muss. Das heißt wenn wir versuchen eine relativistische Quantentheorie zu entwickeln, dann muss auch diese nichtlokal sein. Diese These wurde durch das Bellsche Theorem und durch entsprechende Experimente bestätigt. John Bell hat mit den Bellschen Ungleichungen ein Kriterium entwickelt, mit welchem bestimmt werden kann, ob eine Theorie lokal ist. Im Folgenden werde ich die Nichtlokalität in der Quantenmechanik sowohl über die Bellsche Argumentation herleiten, als auch eine experimentelle Bestätigung dafür vorstellen.
Mit Nichtlokalität ist dabei gemeint, dass es Wechselwirkungen zwischen raumartig getrennten Ereignissen gibt, die sich mit größerer Geschwindigkeit als der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Allerdings sind diese Wechselwirkungen von der Art, dass keine Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden können (vgl. Kapitel 3).
Nichtlokalität ist an sich nichts Neues in der Physik. Es gibt einige Beispiele für nichtlokale Theorien, wie zum Beispiel die Newtonsche Gravitationstheorie. Allerdings nimmt die Nichtlokalität in der Quantenmechanik eine spezielle Form an: In jeder Quantentheorie gibt es eine Wellenfunktion und die Dynamik wird durch sie beschrieben. Die Wellenfunktion ist also der essentielle Baustein der Quantenmechanik, sie lebt auf dem Konfigurationsraum und ist damit von Natur aus nichtlokal. Es ist also eigentlich schon hier ersichtlich, das damit auch jede Quantentheorie nichtlokal formuliert sein muss, zumindest wenn man die Wellenfunktion als Teil der Theorie ansieht.[1]
Trotzdem möchte ich im Folgenden die Nichtlokalität in der Quantenmechanik über das Bellsche Argument herleiten.
Allerdings ist diese Art von Nichtlokalität (durch verschränkte Zustände) etwas Besonderes. Alle anderen bisher bekannten Wechselwirkung nehmen mit der Entfernung ab. Die Fernwirkung ist jedoch komplett unabhängig von Entfernungen und widerspricht damit ganz grundlegend unserer bisherigen physikalischen Intuition. Diese verschränkten Zustände sind somit eine der größten Neuerungen, die die Quantenmechanik mit sich bringt.
Nichtlokalität ist relevant für diese Arbeit, da die spezielle Relativitätstheorie auf den ersten Blick Lokalität beinhaltet. Hier könnte also wesentlicher Widerspruch zur Quantenmechanik entstehen.

2.1 Bells Theorem

Albert Einstein war fest von der Lokalität der Natur überzeugt, seiner Meinung nach muss also jede physikalische Theorie lokal sein. Nichtlokalität hat er als unphysikalisch

abgetan und die nichtlokalen Fernwirkungen in Quantenmechanik als “ghost fields“ bezeichnet. Einstein, Podolsky und Rosen haben deshalb ein Gedankenexperiment vorgestellt (EPR- Argument) aus dem sie schlussfolgern wollten, dass die Quantenmechanik unvollständig sein muss, indem sie an der Lokalität der Natur festhielten. Ihre Erklärung war die Existenz von verborgenen Variablen, die in der bisherigen Beschreibung außen vor gelassen wurden.
Damals war niemand bereit, die Möglichkeit echter physikalischer Nichtlokalität in Betracht zu ziehen, weder Einstein noch Bohr noch sonst jemand. Das führt uns zu folgender Frage: Kommen wir um die Nichtlokalität in der Quantenmechanik herum? Oder anders: Kann es eine lokale Quantenmechanik geben?
John Bell hat das verneint und im Folgenden möchte ich nun Bells Argumentation nachvollziehen:[1]
Sein Beweis besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil bezieht sich auf die von David Bohm vorgeschlagene Version des EPR Gedankenexperiments (EPRB, vgl. Kapitel 1). Es basiert auf der Tatsache, dass man spezielles Paar (L,R) aus Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen präparieren kann, die in entgegengesetzte Richtungen fliegen (L nach links und R nach rechts). Beide Teilchen passieren dann jeweils einen Stern-Gerlach-Magneten (SGM) mit den Orientierungen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Die beiden Raumzeit-Ereignisse, an denen die Teilchen die jeweiligen SGMen passieren sollen raumartig voneinander getrennt sein. Die Teilchen verhalten sich dabei so, dass sie bei gleich orientierten SGMen , genau in entgegengesetzte Richtungen abgelenkt werden, das heißt wenn das Teilchen L einen $\boldsymbol{a}$-Spin $+\frac{1}{2}$ hat, dann muss das Teilchen R einen $\boldsymbol{a}$-Spin $-\frac{1}{2}$ haben und umgekehrt ($\boldsymbol{a}$ ist die Orientierung des jeweilgen SGMen). Die Wahrscheinlichkeit für die beiden möglichen Ausgänge ist jeweils $\frac{1}{2}$ (vgl. Kapitel 1).
Ein solcher Singlett-Zustand, also ein verschränkter, quantenmechanischer Zustand aus zwei Teilchen lässt sich experimentell realisieren. Dadurch ist die folgende Argumentation, die auf der Existenz von diesem Zustand aufbaut, relevant für die Naturbeschreibung. Wird nun der $\boldsymbol{a}$-Spin von L gemessen, ist auch sofort der $\boldsymbol{a}$-Spin von R bekannt, auch wenn L und R raumartig getrennt sind.
Genau diese raumartige Trennung wollen wir jetzt in unser Gedankenexperiment einbauen: Wir wählen der experimentellen Aufbau so, dass das Messergebnis von L nicht durch ein Lichtsignal zum R-Teilchen übermittelt werden kann, bevor R den rechten SGM (SGM-R) passiert und damit sein $\boldsymbol{a}$-Spin festgelegt wird.
Desweiteren wollen wir an der Lokalität festhalten, denn wir wollen überprüfen, ob wir um die Lokalität in die Quantenmechanik mit einbauen können. Wenn wir allerdings Lokalität fordern, dann kann das Ergebnis der $\boldsymbol{a}$-Spin Messung auf der einen Seite kein Einfluss auf die andere $\boldsymbol{a}$-Spin Messung haben, weil L und R raumartig getrennt sind.
Die einzige Möglichkeit wie das realisiert werden kann ist, dass das Messergebnis für den $\boldsymbol{a}$-Spin von R schon vor der Messung feststeht, denn es kann dann nicht durch das Messergebnis von L beeinflusst werden (raumartige Trennung).
Für das folgende Argument ist wichtig, dass die Richtungen ($\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$) der Spin-Messungen in jedem Experiment zufällig und voneinander unabhängig gewählt werden können, das heißt die Teilchen können nicht von vorne herein wissen, in welcher Richtung die Messung stattfindet. Die Orientierungen von SGM-L und SGM-R müssen, wegen der Lokalitäts-

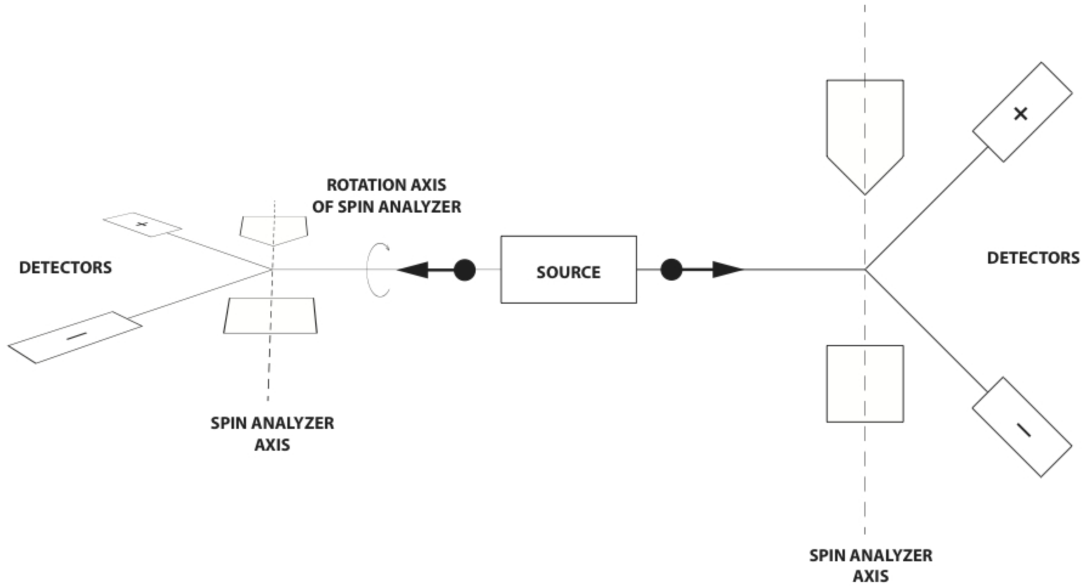

Abbildung 2.1: [19] Bei gleicher Orientierung der SGMen werden die Teilchen in unterschiedliche Richtungen abgelenkt

annahme nicht die Gleichen sein. Wenn aber $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gleich sind, dann müssen die Spins der beiden Teilchen perfekt antikorreliert sein. Um die perfekten Antikorrelationen zu erzielen, müssen die Messergebnisse also schon vor der Messung für alle möglichen Richtungen vorgegeben sein, denn die Entscheidung in welcher Richtung wir messen, wird erst direkt vor der Messung (zufällig) entschieden! Aus Symmetriegründen kann in dieser Argumentation auch L und R vertauscht werden.
Die Lokalitätsforderung liefert uns also einen Satz von vorgegebenen, lokalen Zufallsvariablen $X_{\boldsymbol{a}}^{(L)}, X_{\boldsymbol{a}}^{(R)} \in \{-1, 1\}$ mit $\boldsymbol{a}$ beliebig und $X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{a}}^{(R)}$. Außerdem sollen deren Korrelationen so sein sollen, dass sie auch dann mit den gemessenen relativen Häufigkeiten übereinstimmen, wenn die SGMen nicht gleich orientiert sind. Darüberhinaus nehmen wir nichts über die zugrundeliegende Struktur an.
Es muss jedoch noch gesagt werden, dass die oben beschriebene, zufällige Entscheidung, in welcher Richtung die SGMen orientiert werden, vollkommen unabhängig vom quantenmechanischen Zustand der Teilchen sein sollen und damit keinen Einfluss auf die verborgenen Zufallsvariablen haben können. Die Beschreibung des Messsystems und des physikalischen Systems geschieht also getrennt voneinander.
Es muss für drei beliebige, verschiedene Richtungen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ also folgendes gelten:[1]

$$(X_{\boldsymbol{a}}^{(L)}, X_{\boldsymbol{b}}^{(L)}, X_{\boldsymbol{c}}^{(L)}) = (-X_{\boldsymbol{a}}^{(R)}, -X_{\boldsymbol{b}}^{(R)}, -X_{\boldsymbol{c}}^{(R)}) \tag{2.1}$$

Um zu überprüfen, ob es eine Quantentheorie geben kann, die lokal ist, können wir uns also genauso gut der Frage widmen, ob ein solcher Satz an vorgegebenen Zufallsvariablen existieren kann. Prinzipiell wäre es ja möglich, dass die Zufallsvariablen schon von

Anfang an (also von der raumartigen Trennung) ein Strategie entwickelt haben, die es Ihnen ermöglichen die gemessenen relativen Häufigkeiten zu reproduzieren, obwohl sie aufgrund der Lokalitätsforderung, kurz vor der Messung nicht mehr miteinander kommunizieren können. Anschaulich ausgedrückt bedeutet das, die beiden Teilchen haben sich schon vorher miteinander abgesprochen und ihr Spin ist damit schon vor der Messung (in allen Richtungen) festgelegt.
Bell hat im zweiten Teil seines Arguments gezeigt, dass es einen solchen Satz an Zufallsvariablen nicht geben kann. Wir betrachten dafür die Wahrscheinlichkeiten für die perfekt antikorrelierten Ereignisse

$$X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{b}}^{(R)}, X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{c}}^{(R)}, X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{a}}^{(R)}$$

und addieren diese auf

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{b}}^{(R)}) + \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{c}}^{(R)}) + \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{a}}^{(R)}) \\
&\overset{(2.1)}{=} \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{b}}^{(L)}) + \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{c}}^{(L)}) + \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{a}}^{(L)}) \\
&\geq \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} oder X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} oder X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{a}}^{(L)}) \\
&= \mathcal{P}(sicheres Ergeinis) = 1
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei ist $(X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} oder X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} oder X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} = X_{\boldsymbol{a}}^{(L)})$ ein sicheres Ereignis, da für die drei verschieden Zufallsvariablen $X_{\boldsymbol{a}}^{(L)}, X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} und X_{\boldsymbol{c}}^{(L)}$ nur zwei mögliche Werte $\{-1, 1\}$ zur Verfügung stehen und damit mindestens zwei von Ihnen gleich sein müssen.
Wir haben damit eine Version der Bellschen Ungleichungen gefunden:

$$\mathcal{P}(X_{\boldsymbol{a}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{b}}^{(R)}) + \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{b}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{c}}^{(R)}) + \mathcal{P}(X_{\boldsymbol{c}}^{(L)} = -X_{\boldsymbol{a}}^{(R)}) \geq 1 \tag{2.3}$$

Wenn $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ so gewählt werden, dass sie jeweils einen 120° Winkel miteinender einschließen, dann wissen wir aus der Quantenmechanik, dass sich die linke Seite in (2.3) zu $\frac{3}{4}$ aufaddiert[1] (diese Wahrscheinlichkeit kann in der QM berechnet werden und auch experimentell bestätigt werden). Die Bellsche Ungleichung ist damit verletzt.
Es wurde also gezeigt, dass es in der Quantenmechanik diesen Satz an vorgegebenen Zufallsvariablen $X_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}^{(L,R)}$ nicht geben kann. Im ersten Teil von Bells Beweis wurde aber gezeigt das wir genau diese vorgegebenen Zufallsvariablen brauchen um an der Lokalität in der Quantenmechanik festhalten zu können. Das heißt jede Quantentheorie muss zwangsläufig nichtlokal sein!
Man kann sogar noch weiter gehen und die Aussage unabhängig von irgendeiner Theorie formulieren: Dazu ersetzt man im Wesentlichen in der obigen Argumentation einfach "Quantenmechanik" durch "Experimentelle Fakten" und man kommt damit du der noch stäkeren Aussage:

Jede Theorie, die die Natur beschreiben will, muss nichtlokal sein.[4]

[1]Die Rechnung dazu ist im Anhang zu finden

Obiger Beweis lässt sich auch mit einem Paar aus Lichtquanten durchführen, welche die gleiche Polarisation haben und die Stern-Gerlach Magneten werden durch Polarisatoren ersetzt. Die Argumentation geht ähnlich zu der hier vorgestellten (Maudlin stellt diese Argumentation in seinen Buch vor [5]). Alain Aspect hat hierfür 1982 ein Experiment mit polarisierten Photonen durchgeführt, mit dem er die Verletzung der Bellschen Ungleichung bestätigen konnte.[9]
Der Beweis ist also losgelöst von einer bestimmten Theorie und es gilt:

Natur ist nichtlokal!

Bells Arbeit wurde von vielen Physikern missverstanden, bzw. nur durch Scheuklappen zur Kenntnis genommen. Stattdessen wird behauptet Bell habe lediglich gezeigt: Wenn man versucht die “klassische“ Quantenmechanik durch eine *realistische, mit verborgenen Parametern versehene Theorie* zu ersetzen, muss diese Theorie nichtlokal sein.[1]
Dass die Nichtlokalität nicht wirklich ernst genommen wurde, ist auch ein Stück weit nachvollziehbar, denn sie widerspricht in vielen Weisen unserem bisherigen physikalischen Verständnis: Nicht nur das verschränkte Quantenzustände mit Überlichtgeschwindigkeit kommunizieren können, diese Verbindung wird auch in großer Entfernung nicht klein, so wie sich jede andere uns bekannte, physikalische Wechselwirkung verhält. (vgl. Kapitel 2.3)

2.2 Test der *spukhaften Fernwirkung*

Bisher wurden Wechselwirkungen immer entweder durch Teilchenaustausch (z.B. Bosonen) oder gemeinsame Ursachen in der Vergangenheit erklärt. In der Quantenmechanik tritt nun mit den verschränkten Zuständen ein völlig neues Phänomen auf. Es kann weder durch Teilchenaustausch (raumartig getrennte Zustände) noch durch eine gemeinsame Ursache in der gemeinsamen Vergangenheit (vgl. Bells Theorem, Verletzung der Bellschen Ungleichung) erklärt werden. Einstein nannte diese Wechselwirkung deshalb *spukhafte Fernwirkung*.
Eine echte *spukhafte Fernwirkung* würde eine Signalübertragung benötigen, die sich in einem hypothetischen, privilegiertes Bezugsystem schneller als Licht ausbreitet.
Eine Gruppe von Physikern an der Universität von Genf[2] hat 2008, diese Fernwirkung experimentell bestätigt, indem sie die Verletzung der Bellschen Ungleichung gemessen haben und eine Untergrenze für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fernwirkung angegeben haben. Hiefür haben sie über 24 Stunden Messungen zwischen zwei 18km voneinader entfernten Orten vorgenommen. Die Verbindungslinie war in etwa in Ost-West Richtung ausgerichtet und die Quelle exakt in der Mitte platziert. Es wurden dabei kontinuierlich Interferenzen zwischen zwei verschränkten Photonen gemessen, die die Bellsche Ungleichung deutlich verletzen. Es ist der Gruppe gelungen, für jedes privilegiertes Bezugssystem eine Untergrenze für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der *spukhaften Fernwirkung* anzugeben. Nimmt man zum Beispiel an, das sich die Erde in diesem

[2]D. Salart, A. Baas, C. Branciard, N. Gisin, and H. Zbinden

privilegierten Bezugssystem mit weniger als 10^-3 mal der Lichtgeschwindigkeit bewegt, dann übersteigt die Geschwindigkeit der Fernwirkung die Lichtgeschwindigkeit mindestens um vier Größenordnungen.[3]

2.3 Was ist neu an der Quantenverschränkung?

Es gibt mehrere Eigenschaften der Fernwirkung zwischen den verschränkten Teilchen, die einem aus Sicht der klassischen Physik komisch vorkommen. Das wird deutlich, wenn man sie mit der Newton'schen Gravitationstheorie vergleicht, die ursprünglich auch instantan formuliert wurde.

1. Ein Stein der in München auf den Boden fällt, beeinflusst seine direkte Umgebung und sogar beliebig weit entfernte Objekte (wie zum Beispiel den Mond), allerdings nimmt die Kraft mit zunehmden Abstand ab: $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$. Anders verhält es sich bei der Wechselwirkung zwischen den verschränkten Teilchen, hier spielt die Entfernung überhaupt keine Rolle.

2. Außerdem beeinflusst der fallende Stein seine gesamte Umgebung (wie stark hängt dabei von der Entfernung ab), die Quantenkommunikation findet nur zwischen den jeweiligen Teilchen statt, die durch den verschränkten, quantenmechanischen Zustand beschrieben werden. Andere Teilchen werden durch diese Wechselwirkung nicht beeiflusst. Die Teilchen wissen also untereinander mit welchem Partner sie zusammen gehören.

3. Die Quantenkommunikation geschieht instantan, auch zwischen zwei raumartig getrennten Ereignissen, sie breitet sich also schneller als Licht aus. Aus historischer Sicht ist das zwar die harmloseste Eigenschaft, denn auch die Gravitationskraft und die elektro-magnetische Kraft wurden ursprünglich instantan formuliert, allerdings war die Überlichtgeschwindigkeit kein essentieller Bestandteil dieser Theorien. In den jeweiligen späteren Versionen der Theorien (z.B. Allgemeine Relativitätstheorie) wurde die Wechselwirkung mit Austauschteilchen und damit mit einer gewissen Verzögerung erklärt.

Während wir die Eigenschaften 1. und 2. einfach akzeptieren können, auch wenn sie uns erstaunen, können wir 3. nicht einfach so hinnehmen, da sich 3. scheinbar nicht mit der Relativitätstheorie vereinbaren lässt. Wir müssen uns im Folgenden also mit diesem Punkt genauer damit befassen.[5]

3 Relativität und Kausalität

3.1 Einsteinscher Lokalitätsgedanke

Einstein widerstrebte die "spukhafte Fernwirkung", die räumlich getrennte Teile eines Quantensystems zu einem gemeinsamen Verhalten zwingt. Tatsächlich erschüttert die Quantenverschränkung manche Grundlagen der Physik, daher die Lokalität für uns durch unsere Alltagsehrfahrungen sehr intuitiv ist.[3] Laut Einstein werden zwei raumartig getrennte Ereignisse A,B durch zwei eigenständige physikalische Zustände beschrieben und es gilt folgende Aussage:

"What actually happens with A does not change anything actual for B"[7]

Die Lichtgeschwindigkeit hat eine ausgezeichnete Rolle in der speziellen Relativitätstheorie und wenn man annimmt, dass sie eine obere Schranke für die Ausbreitungsgeschwindigkeit aller kausalen Prozesse bildet, dann kann man obige Aussage auch noch verschärfen: In diesem Fall können externe Einflüsse auf A auch keine indirekten Einflüsse auf B haben. Die raumartige Trennung von Ereignissen beinhaltet dann also, dass die beiden Ereignissen kausal voneinander getrennt sind![5]
Bell formuliert den Lokalitätsgedanken auf seine eigene Art und Weise als *Prinzip der lokalen Kausalität*:

"The direct causes (and effects) of events are near by, and even the indirect causes (and effects) are no further away than permitted by the velocity of light."[6]

Das heißt nach diesem Prinzip müssen alle Ursachen eines Ereignisses, in dessem Vergangenheitslichtkegel liegen.
Er hat mit den Bellschen Ungleichungen ein Kriterium entwickelt, mit dem überprüft werden kann, ob eine Theorie dem Bellschen Prinzip der *lokalen Kausalität* folgt oder nicht. Grundlage für die Bellschen Ungleichung ist die Separations-Bedingung. Beim vorgestellten EPRB-Experiment folgt diese direkt aus dem Versuchsaufbau.[4]
In Kapitel 2 haben wir bereits gesehen, dass es in der Quantenmechanik physikalische Situationen gibt, die sich nicht mit diesen Prinzipien erklären lassen. Es muss also genauer untersucht werden, welche Forderungen wesentlich für eine relativitsiche Theorie sind und welche man verändern kann, beziehungsweise muss.

3.2 Widerspruch?

Die entscheidende Frage ist: Widersprechen sich die Nichtlokalität der Natur (vgl. Kapitel 2) und die spezielle Relativitätstheorie? Diese Frage ist keine Einfache! Es gibt zwar

Theorien die Signalübermittlung mit Überlichtgeschwindigkeit zulassen und trotzdem mit der speziellen Relativitätstheorie verträglich sind, aber in der Quantenmechanik haben wir es mit einer speziellen Art der Nichtlokalität zu tun. Würde die spezielle Relativitätstheorie Fernwirkung zwischen verschränkten Zuständen wirklich verbieten, so hätte Aspect die spezielle Relativitätstheorie durch seine Experimente klar widerlegt.[5],[9]

Außerdem tritt noch ein weiteres Problem auf. Jede Quantentheorie ist bestimmt durch eine Wellenfunktion. Man muss sich zunächst überlegen welche Natur diese Wellenfunktion hat. Sie lebt auf dem abstrakten, vieldimesionalen Konfigurationsraum und ist damit von vorne herein nichtlokal. Hier ergibt sich ein grundlegendes Problem: die spezielle Relativitätstheorie ist in der Minkowski Raumzeit, sprich dem $\mathbb{R}^4$ formuliert und es ist nicht klar, wie hier die Verbindung hergestellt werden soll. Diesen Problemen muss man sich stellen, wenn man das Ziel verfolgt eine von Grund auf relativistische Quantenmechanik zu entwickeln, in welcher Bells Theorem ernst genommen wird.
Darüberhinaus gibt es verschiedene Meinungen darüber, ob die Wellenfunktion vollständig ist, das heißt ob alle relevanten physikalischen Informationen in ihr enthalten sind oder ob es zusätzliche Parameter gibt (wie z.B. in der Bohmschen Mechanik).
Wenn man allerdings die Vollständigkeit der Wellenfunktion annimmt, dann kann die Schrödingergleichung nicht die einzige Gleichung sein, die die Zeitentwicklung des physikalischen Systems beschreibt, denn bei einer Messung kollabiert die Wellenfunktion und das kann nicht durch die Schrödingergleichung beschrieben werden. Dieser Kollaps der Wellenfunktion muss dann aber als wirkliche Veränderung des physikalischen Zustands verstanden werden, da er in dieser Interpretation ausschließlich und eindeutig durch die Wellenfunktion festgelegt ist. Diese Veränderung des physikalischen Zustand (Kollaps der Wellenfunktion) muss dann auch in einen relativistischen Rahmen eingebettet werden.
Andererseits, wenn man annimmt, dass die Schröndingergleichung die einzige Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion ist, dann reicht die Wellenfunktion nicht aus, um das physikalische System vollständig zu beschreiben, es muss zusätzliche Größen geben, die die Fakten beschreiben. So oder so, müssen diese Vorgänge relativistisch formuliert werden.[5]
Zusätzlich gibt es noch das Problem, dass in der Relativitätstheorie Raum und Zeit gleichgestellt sind und somit die Verschränkung zwischen den räumlich getrennten Ereignissen in eine Art Verschränkung zwischen physikalischen Situationen verschiedener Zeitpunkte übergeht.
Die Verschränkung bewirkt eine instantane, also *absolut gleichzeitige* Fernwirkung eines Teilchens auf ein anderes, raumartig entferntes Teilchen, doch allein schon der Begriff der *Gleichzeitigkeit* ist in der speziellen Relativitätstheorie äußerst problematisch.[2]

Also selbst wenn uns die spezielle Relativitätstheorie obige Fernwirkung “erlauben“ würde, wären noch lange nicht alle Probleme gelöst und diese Prozesse mit Überlichtgeschwindigkeit hätten zumindest einige ungewöhnliche Eigenschaften. Diese Probleme gilt es in den folgenden Kapiteln zu untersuchen!

3.3 Raumzeitstruktur

Jede Raumzeit hat gewisse Freiheiten, es werden also bestimmte Transformationen zugelassen, unter welchen die physikalischen Gesetze erhalten bleiben. In der klassischen Physik sind das die Newtonschen Gesetze. Das führt dazu, das in allen Bezugssystem die aus der Galilei-Transformation hervorgehen die gleichen physikalischen Gesetze gelten. Diese Transformation lässt zum Beispiel den zeitlichen Abstand zwischen zwei Ereignissen invariant, genauso wie den räumlich Abstand *gleichzeitiger* Ereignisse. Solche Invarianten sind also in allen Bezugssystemen gleich. Es scheint plausibel, das alle objektiven, physikalischen Größen durch solche Invarianten beschrieben werden sollten.

Einstein hat die klassische Physik jedoch grundlegend revolutioniert. Er geht davon aus, dass die Raumzeit der Minkowski Raum ist, also der $\mathbb{R}^4$ mit der Minkowski-Metrik. Daraus folgt dann folgende Aussage:

> *“Jeder Lichtstrahl (im Vakuum) hat in allen verschiedenen Inertialsystemen dieselbe Geschwindigkeit, nämlich die Lichtgeschwindigkeit c“* [5]

Aus dieser Forderung ergibt sich eine vollkommen neue Struktur der Raumzeit. Die Galilei Transformation ist nicht verträglich mit diesem Postulat und muss durch die Lorentz-Transformation ersetzt werden. Das ist die Gruppe derjenigen Transformationen, die Minskowski-Metrik $g^{\mu\nu}$[3] invariant lassen. Es gilt also:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} g^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g^{\mu\nu} \tag{3.1}$$

wobei $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ Lorentz-Transformationen sind. Daraus resultiert jedoch auch, dass nicht mehr dieselben Größen invariant sind. Zum Beispiel die Zeit ist keine solche Invariante unter Lorentz-Transformation. Es ist also nicht mehr so einfach möglich den Begriff *Gleichzeitigkeit* zu definieren, denn ob zwei Ereignisse gleichzeitig sind, hängt dann vom jeweiligen Bezugssystem ab.[5]

Aber auch unter der Lorentz-Transformation gibt es verschiedene Invarianten, es lässt zum Beispiel ein neuer Abstand $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ definieren, welcher in jedem Lorentz-Bezugssystem gleich ist (vgl. Minkowski-Metrik).

Durch Δs^2 wird die Raumzeit in verschiedene Bereiche aufgeteilt:

1. $\Delta s^2 > 0$: *zeitartig getrennt*, das heißt für zwei zeitartig getrennte Ereignisse gibt es immer ein Bezugssystem in dem die beiden Ereignisse am gleichen Ort sind. Hier ist die zeitliche Reihenfolge der Ereigisse in jedem Lorentz-Bezugssystem die gleiche, die zeitliche Reihenfolge ist also eine Lorentz-Invariante.

---

[3]Die Minkowski Metrik sieht folgendermaßen aus: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(Manche Autoren wählen die Vorzeichen auch genau anders herum.)

2. $\Delta s^2 = 0$: *lichtartig getrennt*, das heißt die beiden Ereignisse können durch einen Lichtstrahl verbunden werden.

3. $\Delta s^2 < 0$: *raumartig getrennt*, das heißt es gibt ein Bezugssystem in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig sind. Die zeitliche Reihenfolge von raumartigen getrennten Ereignissen ist im Gegensatz zu 1. abängig vom Bezugssystem und lässt sich deshalb nicht eindeutig definieren.

Die einzige Struktur der Raumzeit ist also die Metrik, aus ihr geht alles Weitere, wie zum Beispiel die Lorentz-Transformation hervor. Das kann man also folgende Minimalforderung an jede relativistische Theorie stellen:
Die Minkowski-Metrik ist die einzige Struktur in der Raumzeit (Minkowski-Raum $\mathbb{R}^4$).[5]

3.4 Überlichtgeschwindigkeit in der SRT

3.4.1 Tachyonen

Die meisten Leute denken, dass die Lichtgeschwindigkeit in der spezielle Relativitätstheorie eine obere Schranke für Geschwindigkeiten bildet, mit der sich Materie und Licht ausbreiten können. Allerdings wurde die spezielle Relativitätstheorie, bzw. die Lorentz-Transformation ausschließlich aus der Forderung entwickelt, dass "ein Lichtstrahl (im Vakuum) in jedem Inertialsystem dieselbe Geschwindigkeit c (Lichtgeschwindigkeit) hat" (vgl. Kapitel 3.1 bis 3.3). Hypothetische Teilchen, die sich schneller als Licht ausbreiten (Tachyonen), haben zwar sehr spezielle und ungewöhnliche Eigenschaften, stehen aber zunächst in keinem Widerspruch zum Grundgedanken der Relativitätstheorie, der die Lichtgeschwindigkeit nicht als obere Grenze sieht, sondern aus ausgezeichnete Geschwindigkeit, die in allen Bezugssystemen gleich ist.
Die Masse eines Objekts nimmt mit dessen Geschwindigkeit zu und divergiert, wenn man versucht es auf, beziehungsweise über Lichtgeschindigkeit zu beschleunigen. Die Geschwindigkeit hängt aber vom Bezugssystem ab und im Ruhesystem des Teilchen hat das Licht immer noch die Geschwindigkeit c (unabhängig davon, wie nahe die Teilchengeschwindigkeit im Laborsystem bereits an der Lichtgeschwindigkeit dran ist). Das heißt die spezielle Relativitätstheorie beinhaltet, dass man keine Teilchen über die Schwelle der Lichtgeschwindigkeit hinweg beschleunigen kann (bzw. kein Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen kann). Allerdings verbietet die Theorie erstmal keine (massiven) Teilchen, die "von Geburt an" schneller als Licht sind. Diese Tachyonen haben aber sehr "komische" Eigenschaften und können die Fernwirkung in der Quantenmechanik leider nicht erklären. Das erklärt Maudlin ausführlich in seinem Buch [5].

3.4.2 Kausale Schleifen

Wenn man in der speziellen Relativitätstheorie Signale zulässt, die sich schneller als Licht ausbreiten und trotzdem kein bevorzugtes Bezugssytem zulässt (die Metrik also die einzige Struktur der Raumzeit ist), dann lassen sich widersprüchliche Gedankenexperimente

(kausale Schleifen) konstruieren: Wenn Ursache und Wirkung raumartig voneinander getrennt sind, dann gibt es auch immer ein Bezugsystem, indem die Wirkung der Ursache vorausgeht. Das ist extrem kontraintuitiv und es lassen sich geschlossene, kausale Ketten bilden, die zu logischen Widersprüchen führen können. In diesen Beispielen wird aber immer *Kontrollierbarkeit* vorausgesetzt.[4]
Ein Bespiel ist Folgendes: Man betrachte ein Gewehr G und eine Zielscheibe Z. Das Gewehr feuert eine Kugel (schneller als Licht) auf die Zielscheibe, dabei sollen das Gewehr und die Zielscheibe raumartig getrennt sein. Außerdem soll die Zielscheibe ein Signal an das Gewehr schicken sobald sie getroffen wurde und das Gewehr soll keine Kugel abfeuern falls es ein solches Signal bekommt.
Durch die raumartige Trennung von G und Z gibt es aber auch immer ein Lorentz-Bezugssystem, indem das Signal von Z, G erreicht bevor G überhaupt eine Kugel abgefeuert hat. Das Gewehr kann in diesem Bezugssystem also weder eine Kugel abfeuern, noch keine Kugel abfeuern.[5]
Solche Paradoxien setzen immer die Kontrollierbarkeit der Signale voraus. Im nächsten Kapitel wollen wir uns mit Signalen beschäftigen und uns die Frage stellen, ob uns die verschränkten Zustande in der Quantenmechanik, die die Bellsche Ungleichung verletzten eine Möglichkkeit bieten, kontrollierbare Signale schneller als Licht zu schicken, denn solche kontrollierbaren Signale wären zumindest auf den ersten Blick äußerst problematisch.

3.5 Kausalität in relativistsischen Quantentheorien - *lokale Vertauschbarkeit*

3.5.1 Signalübertragung schneller als Licht?

Im diesen Kapitel geht es darum zu überprüfen, ob uns der quantenmechanische Mechanismus aus Kapitel 2 eine Möglichkeit bietet, Signale schneller als Licht zu senden. Um jedoch über Signalübertragungen sprechen zu können, muss man sich zunächst klarmachen, was ein Signal ist. Tim Maudlin hat hierfür eine allgemeine Definition geliefert:

> *A signal is a physical process which can be decomposed into two correlated parts: a controllable and an observable part.*[5]

Dabei muss *controllable* nicht unbedingt bedeuten, dass ein Mensch etwas steuert, sondern einfach nur, dass es einen freien Parameter in der Theorie gibt und der bei Variation auch die Vorhersagen verändert.
Es gibt drei Möglichkeiten einen quantenmechanischen Prozess zu *kontrollieren*:[4]

(i) durch die Entscheidung, ob eine Messung durchführt wird

(ii) durch die Entscheidung den Messapparat zu verändern, sprich den quantenmechanischen Operator zu verändern

(iii) durch die Entscheidung, einen externen Parameter zu variieren, der mit einer Variablen des Systems wechselwirkt

Jetzt möchte ich zeigen, dass es mit keinem dieser Mechanismen in der Quantenmechanik möglich ist, Signale zu übertragen:[4],[8]

Zu (i): Die Entscheidung, ob eine Messung $\hat{B}$ in $\mathcal{B}$ stattfindet, kann nicht zur Signalübertragung verwendet werden, denn es kann gezeigt werden, dass eine solche Entscheidung die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Messergnisse von raumartig getrennten Ereignissen nicht beieinflusst. Mathematisch ausgedrückt sieht das folgendermaßen aus:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} = \alpha \mid \mathcal{B} \textit{ wurde gemessen}) = \mathbb{P}(\mathcal{A} = \alpha) \tag{3.2}$$

(3.2) kann relativ simpel hergeleitet werden, dies macht unter anderen Christian Beck in seiner Diplomarbeit (vgl. [4]). In dieser Herleitung wird verwendet, dass die beiden selbstadjungierten Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren, sprich $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Es gilt:

$$\hat{A} = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{l_\alpha} \alpha \, |\phi_\alpha^{(i)}\rangle \langle \phi_\alpha^{(i)}| \tag{3.3}$$

$$\hat{B} = \sum_{\beta} \sum_{j=1}^{l_\beta} \beta \, |\xi_\beta^{(j)}\rangle \langle \xi_\beta^{(j)}| \tag{3.4}$$

wobei $|\phi_\alpha^{(i)}\rangle$ und $|\xi_\beta^{(j)}\rangle$ die jeweiligen Eigenvektoren mit den Eigenwerten α und β sind. Für $\mathcal{P}_\alpha = \sum_{i=1}^{l_\alpha} |\phi_\alpha^{(i)}\rangle \langle \phi_\alpha^{(i)}|$ und $\mathcal{P}_\beta = \sum_{j=1}^{l_\beta} |\xi_\beta^{(j)}\rangle \langle \xi_\beta^{(j)}|$ gilt $\sum_\alpha \mathcal{P}_\alpha = \sum_\beta \mathcal{P}_\beta = \mathbb{1}$. Dabei ist zu beachten, dass die jeweiligen Projektoren kommutieren, da auch $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren.

Aus diesen Eigenschaften soll nun (3.2) herleitet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\psi(\mathcal{A} = \alpha') &= \langle \psi | \mathcal{P}'_\alpha | \psi \rangle = \langle \psi | \Big(\sum_\beta \mathcal{P}_\beta \Big) \mathcal{P}'_\alpha | \psi \rangle = \sum_\beta \langle \psi | \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}'_\alpha | \psi \rangle \\
&\overset{\mathcal{P}_\beta^2 = \mathcal{P}_\beta}{=} \sum_\beta \langle \psi | \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}'_\alpha | \psi \rangle = \sum_\beta \langle \psi | \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}'_\alpha \mathcal{P}_\beta | \psi \rangle \\
&= \sum_\beta \left(\frac{\langle \psi | \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}'_\alpha \mathcal{P}_\beta | \psi \rangle}{\langle \psi | \mathcal{P}_\beta | \psi \rangle} \right) \cdot \langle \psi | \mathcal{P}_\beta | \psi \rangle \\
&= \sum_\beta \mathbb{P}_\psi(\mathcal{A} = \alpha' \mid \mathcal{B} = \beta) \cdot \mathcal{P}_\psi(\mathcal{B} = \beta) \\
&= \sum_\beta \mathbb{P}_\psi(\{\mathcal{A} = \alpha'\} \cap \{\mathcal{B} = \beta\}) \\
&= \mathbb{P}_\psi(\mathcal{A} = \alpha' \mid \mathcal{B} \textit{ wurde gemessen})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Das beinhaltet allerdings keinen Widerspruch zur Verletzung der Bellschen Ungleichung, denn damit die Bellsche Ungleichung erfüllt ist, müsste gelten:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} = \alpha' \mid \mathcal{B} = \beta) = \mathbb{P}(\mathcal{A} = \alpha') \ \forall \beta \tag{3.6}$$

Das gilt in der Quantenmechanik jedoch im Allgemeinen nicht!

Zu (ii): Hier gilt dieselbe Argumentation wie bei *(i)*, wenn eine Messung in $\mathcal{B}$ das Messergebnis in $\mathcal{A}$ nicht beeinflussen kann, dann kann das auch keine Veränderung am Messapparat. Eine solche kontrollierbare Aktion kann die Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse an einem raumartig entfernten Ort nicht ändern.

Zu (iii): Um zu sehen, ob kontrollierbare äußere Einflüsse in $\mathcal{B}$ die Wahrscheinlichkeiten für ein bestimmtes Ereignis in $\mathcal{A}$ invariant lassen, betrachten wir die Wellenfunktionen vor und nach der Wechselwirkung mit dem System. Falls $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren, können wir eine orthonormale Basis $\{|\alpha, \beta, i\rangle\}$ finden, die aus gemeinsamen Eigenzuständen von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ besteht und wir drücken die Wellenfunktionen in dieser gemeinsamen Basis aus:

$$|\psi_{in}\rangle = \sum_{\alpha,\beta,i} c_{\alpha,\beta,i} |\alpha, \beta, i\rangle \tag{3.7}$$

$$|\psi_{out}\rangle = e^{-ik\hat{B}} |\psi_{in}\rangle = \sum_{\alpha,\beta,i} c_{\alpha,\beta,i} e^{-ik\beta} |\alpha, \beta, i\rangle , \tag{3.8}$$

Die Kopplung wird dabei durch den Hamiltonoperator $\mathcal{H} = \tilde{k}\hat{B}$ beschrieben und es gilt $k = \int dt\tilde{k}$.

Mit (3.7) und (3.8) wird nun unter Verwendung der Orthonormalität der Eigenvektoren gezeigt, dass die oben genannte Wahrscheinlichkeiten unter äußeren Einflüssen invariant bleiben:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\psi_{in}}(\mathcal{A} = \alpha' \mid \textit{äußerer Einfluss in } \mathcal{B}) = \mathbb{P}_{\psi_{out}}(\mathcal{A} = \alpha') \\
&= \langle\psi_{out}| \sum_{\beta,i} |\alpha', \beta, i\rangle \langle\alpha', \beta.i| \, |\psi_{out}\rangle \\
&\overset{(3.8)}{=} (\sum_{\alpha,\beta,i} \bar{c}_{\alpha,\beta,i} e^{ik\beta} \langle\alpha, \beta, i|)(\sum_{\beta,i} |\alpha', \beta, i\rangle \langle\alpha', \beta.i|)(\sum_{\alpha,\beta,i} c_{\alpha,\beta,i} e^{-ik\beta} |\alpha, \beta, i\rangle) \\
&= (\sum_{\alpha,\beta,i} \bar{c}_{\alpha,\beta,i} e^{ik\beta} \langle\alpha, \beta, i|)(\sum_{\beta,i} c_{\alpha',\beta,i} e^{-ik\beta} |\alpha', \beta, i\rangle) \\
&= \sum_{\beta,i} |c_{\alpha',\beta,i}|^2 \overset{(3.7)}{=} \mathbb{P}_{\psi_{in}}(\mathcal{A} = \alpha')
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(vgl. [4])

Damit kann auch *(iii)* nicht zur Signalübertragung genutzt werden (zumindest wenn man annimmt, dass die entsprechenden Operatoren kommutieren)!

Insgesamt kommen wir also mit der Annahme, dass die selbstadjungierten Operatoren kommutieren (vgl. *lokale Vertauschbarkeit*) zu dem Schluss, dass uns die Nichtlokalität in der Quantenmechanik keine Möglichkeit bietet Signale oder Energie/Materie mit Überlichtgeschwindigkeit zu senden, also

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} = \alpha \mid \textit{kontrollierbare Operation in } \mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{A} = \alpha) \tag{3.10}$$

Das ist auch gut so, denn wie wir in den voherigen Kapiteln bereits gesehen haben würden sich durch solche kontrollierbaren Signale ein großes Dilemma ergeben:
Wir müssten entweder diese scheinbar widersprüchlichen Paradoxien, die durch kausale Schleifen entstehen (wie in Kapitel 3.4 beschrieben) akzeptieren oder wir müssten zusätzliche Strukturen in der Raumzeit einführen und damit den Grundgedanken der Relativitätstheorie aufgeben.

Die Verletzung der Bellschen Ungleichung beinhaltet also nicht zwingend, dass auch eine Signalübertragung schneller als Licht möglich ist und es bleibt damit eine gewisse Form der Kausalität bestehen.
Diese Form der Kausalität lässt uns hoffen, dass es vielleicht doch möglich ist, eine relativistische Quantenmechanik formulieren zu können, auch wenn es nicht die Art von Kausalität ist, die sich Einstein vorgestellt hat:[4],[5]

“What actually happens with A does not change anything actual for B“[7]
(A,B raumartig getrennte Ereignisse)

3.5.2 Notwendigkeit der *lokalen Vertauschbarkeit*

Es scheint ein bisschen so, als sei die *lokale Vertauschbarkeit* eine Verzweiflungstat, um die Signalübertragung schneller als Licht (und die damit verbundenen Schwierigkeiten) mit aller Gewalt zu verhindern. Es wurde bisher keine weitere Begründung für die *lokale Vertauschbarkeit* geliefert. Deshalb möchte ich diese Begründung nun nachreichen.
Wenn wir an der Minkowski-Raumzeit Struktur ($\mathcal{M}$) festhalten wollen, dann führt uns kein Weg an der *lokalen Vertauschbarkeit* vorbei, denn in $\mathcal{M}$ gibt es immer ein Bezugssystem in dem zwei raumartig getrennte Messungen “gleichzeitig“ sind. In der Quantenmechanik können zwei nicht kommutierenden Operatoren aber nicht simultan gemessen werden (vgl. Heißenbergsche Unschärferelation).[4]
Lokale Vertauschbarkeit (oft wird in der Quantenfeldtheorie auch von Mikrokausalität gesprochen) ist außerdem, oder gerade deshalb eines der Axiome in der Quantenfeldtheorie.

3.6 Die Rolle der Wellenfunktion

Wir haben also bereits gesehen, dass die Wellenfunktion eine wichtige Rolle für die Einbettung der Quantenmechanik in einem relativistischen Rahmen spielt. Im Folgenden möchte ich deshalb genauer auf die Natur der Wellenfunktion eingehen.

Als erstes stellt man fest, dass die Wellenfunktion nicht im "physikalischen Raum" (dem $\mathbb{R}^4$) lebt, sondern auf dem Konfigurationsraum. Jeder Punkt im Konfigurationsraum legt den physikalischen Zustand des Systems fest.
Unter den Physikern gibt es verschiedene Ansichten bezüglich der Wellenfunktion. Die Einen sind der Meinung, dass die Wellenfunktion komplett ist, sprich alle relevanten Informationen in ihr enthalten sind. In dieser Sichtweise kann die Schrödingergleichung aber keinesfalls die einzige Gleichung für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion sein. Es gibt dann immer zwei Möglichkeiten für die Zeitentwicklung: Sie kann entweder entsprechend der Schrödingergleichung geschehen (unitäre Entwicklung) oder es tritt ein sogenannter Kollaps der Wellenfunktion ein. Dieser Kollaps geschieht immer dann, wenn eine Messung stattfindet. Es ist allerdings nicht wirklich klar, was eine solche Messung ausmacht, beziehungsweise welches Ereignis eine "Messung" darstellt. Der Kollaps muss hier als eine wirkliche Veränderung des physikalischen Zustands verstanden werden und beinhaltet ein stochastisches Element. Die Hauptaufgabe, die sich ergibt, wenn man eine relativistische Quantenmechanik in dieser Sichtweise entwickeln will, besteht darin, den Kollaps relativistisch zu beschreiben und ein klares Kriterium zu liefern, wann er stattfindet.

Eine andere Möglichkeit ist die Annahme, dass die Schrödingergleichung die einzige Gleichung die die Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist. Dann kann die Wellenfunktion aber unter keinen Umständen komplett sein, es muss zusätzliche Parameter geben, das heißt, dass ein physikalischer Zustand dann nicht mehr vollständig durch die Wellenfunktion charakterisiert werden kann (diese Sichtweise wird z.B. in der Bohmsche Mechanik vertreten). Hier entwickelt sich die Wellenfunktion immer deterministisch gemäß der Schrödingergleichung, es gibt also keine stochastischen Elemente. Die Theorie ist damit vollständig deterministisch. Aber auch in diesen Theorien gibt es, wie wir später sehen werden große Probleme, sobald man auf eine Vereinbarung mit der Relativitätstheorie abzielt.
Jeder kann seine eigene Meinung zu diesem Thema haben, allerdings ist es für unsere Zwecke erstmal nicht wichtig welchen Standpunkt man vertritt, denn wir haben bereits gezeigt, das jede Theorie kausale Einflüsse beinhalten muss, die sich schneller als Licht ausbreiten. Diese kausalen Einflüsse können in keiner der obigen Sichtweisen erklärt werden: In einer lokalen, deterministischen Theorie kann man zwar die perfekten Korrelationen zwischen den beiden Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen erzielen, nicht jedoch die anderen Korrelationen. Lokale stochastische Theorien können diese perfekten Korrelationen nicht beschreiben.[5]

3.7 Kausale Verbindung

Wir haben gesehen, dass es mit dem Quantenmechanischen Mechanismus, der die Verletzung der Bellschen Ungleichung bewirkt, nicht möglich ist Signale zu übermitteln, die sich schneller als Licht ausbreiten. Trotzdem muss es eine kausale Verbindung zwischen den raumartig getrennten Ereignissen geben, also einen kausalen Einfluss der sich schnel-

ler als Licht ausbreitet. Die Frage ist, widerspricht das den Grundsätzen der speziellen Relativitätstheorie?
In den vorherigen Kapiteln wurde bereits besprochen, dass in der Relativitätstheorie die Lichtgeschwindigkeit nicht von vorne herein eine obere Schranke ist. Wir konnten theoretische Teilchen (Tachyonen) konstruieren, die sich schneller als Licht bewegen und trotzdem verträglich mit den Grundlagen der Relativitätstheorie sind. Allerdings lassen sich kausale Schleifen konstruieren, die zu logischen Widersprüchen führen, falls man die Verwendung eines ausgezeichneten Bezussystems vermeidet. Kontrollierbarkeit war immer die wesentliche Annahme für solche Paradoxien.
Die kausale Verbindung zwischen den beiden raumartig getrennten Teilchen, die durch einen verschränkten Zustand beschrieben werden, beinhaltet keine Kontrollierbarkeit und damit ergibt sich diesbezüglich auch kein Problem. In der nicht-relativistischen Quantenmechanik ist die zeitliche Reihenfolge von Ereignissen genau festgelegt. Man kann also ohne Probleme sagen, welches Ereignis die Ursache und welches die Wirkung ist. Wird zum Beispiel der Spin (beispielsweise in z-Richtung) des linken Teilchens gemessen, ist das Ergebnis in der Standard-Quantenmechanik rein zufällig. Durch diese Messung kollabiert die Wellenfunktion des verschränkten Zustands (überall gleichzeitig) und legt den Spin des rechten Teilchens fest (genau in die entgegengesetzte Richtung). Die Messung auf der linken Seite ist also die Ursache und dessen Wirkung ist die Festlegung des Spins von dem rechten Teilchen.
Im relativistischen Fall gibt es wegen der raumartigen Trennung der Ereignisse aber auch immer ein Lorentz-Bezugssystem, indem die Messung auf der rechten Seite zuerst stattfindet und sich obige Situation damit genau umkehrt darstellt. Ursache und Wirkung sind dann vertauscht. Welches Ereignis Ursache und welches Wirkung ist, hängt vom Bezugssystem ab.
Solange Ursache und Wirkung keine instrinsischen Markierungen tragen, die sie in allen Bezugssytemen als solche kennzeichnen, stellt das jedoch kein Problem dar. Der Begriff von Ursache und Wirkung wird also auch relativ und hängt vom Bezugssystem des Beobachters ab. Für jeden Beobachter ist in obigen Beispiel, die erste Messung (in seinem Bezugssytem S) Ursache und der Kollaps der Wellenfunktion geschieht an jedem Ort gleichzeitig, wobei die Gleichzeitigkeit auch wieder auf das Bezugssystem S bezogen ist. Ein anderer Beobachter im Bezugssystem S' sieht Ursache und Wirkung unter umständen vertauscht, aber das ändert nichts an der physikalischen Situation, denn für die kausale Verbindung ist es nicht entscheidend was Ursache und was Wirkung ist.[5]
Diese kausale Verbindung ist nicht kontrollierbar, also lassen sich auch keine logischen Widersprüche durch kausale Schleifen konstruieren.
In der Standard-Quantenmechanik geschieht die kausale Verbindung durch den Kollaps der Wellenfunktion und in den deterministischen Theorien, die ohne Kollaps der Wellenfunktion formuliert sind, werden die Teilchen durch die Wellenfunktion “geleitet“, diese ist allerdings selbst absolut nichtlokal. Die kausale Verbindung der raumartig getrennten Ereignisse ist damit von vorne herein mit in der Theorie mit eingebaut.
Es sind damit aber leider nicht alle Probleme behoben, denn es muss nach wie vor untersucht werden, ob diese Einflüsse, die sich schneller als Licht ausbreiten, irgendein Bezugssystem bevorzugen und damit die Lorentz-Invarianz brechen.

Es muss eine Theorie entwickelt werden, die den Kollaps der Wellenfunktion in einen relativistischen Rahmen einbettet, oder falls man Theorien bevorzugt, die ohne den Kollaps der Wellenfunktion formuliert sind (z.B. Bohmsche Mechanik), dann muss man diese Lorentz-invariant formulieren.
Das leistet bisher noch keine Theorie, auch nicht die Quantenfeldtheorie, in ihr transformieren zwar die quantenmechanischen Zustände auf die richtige Art und Weise, und die entsprechenden Gleichungen sind Lorentz-invariant, aber der Kollaps der Wellenfunktion, der für die Verletzung der Bellschen Ungleichung verantwortlich ist, wird nicht relativistisch invariant formuliert.[5]

4 Lösungsansätze und Probleme

Wie wir bereits gesehen haben, verbietet die Relativitätstheorie erstmal keine Geschwindigkeiten über der Lichtgeschwindigkeit, wenn man die Lorenz-Transformation und relativistische Raumzeitstruktur (Minkowskiraum mit Minkowski-Metrik als einzige zusätzliche Struktur) als Grundlage der Relativitätstheorie betrachtet. Allerdings kann es dabei zu komischen und kontraintuitiven Phänomenen kommen. Die Lichgeschwindigkeit c ist nur insofern speziell, als dass sie in allen Bezugsystemen gleich ist, das heißt sie ist invariant unter Lorentz-Transformation, im Gegensatz zu allen anderen Geschwindigkeiten. Die Aufgabe ist nun also die Quantenmechanik in diesen relativistischen Rahmen einzubetten. Daher es aber verschiedene Interpretationen der Quantenmechanik gibt, müssen wir die Probleme, die sich dabei ergeben, gesondert für die jeweiligen Theorien untersuchen.[5]

Aber zunächst noch zu der Frage: Warum machen wir uns überhaupt diese Mühe? Es gibt doch die Quantenfeldtheorie, die entsprechenden Zustände transformieren in der richtigen, relativistischen Art und Weise und die dazugehörigen Gleichungen sind Lorentz-invariant. Diese Eigenschaften reichen aber leider nicht aus. Die Kollaps der Wellenfunktion geschieht überall gleichzeitig und ist damit hochgradig nichtlokal.Dieser Vorgang muss relativistisch invariant beschrieben werden. Diese Problematik wird in der Quantenfeldtheorie komplett außen vor gelassen. Es gibt zwar das Axiom der *Equal Time Commutation Relations*, welches besagt, dass zwei Operatoren, die bestimmte Größen an raumartig getrennten Orten repräsentieren, kommutieren. Dieses Axiom verhindert die Möglichkeit von Signalen (ein Signal ist dabei so zu verstehen, wie es Kapitel 3 definiert wurde), die sich schneller als Licht ausbreiten (vgl. *lokale Vertauschbarkeit* in Kapitel 3), schließt aber keine kausalen Wirkungen mit Überlichtgeschwindigkeit aus.[5]

4.1 Lorentz-invariante Kollaps-Theorien

In allen nicht-relativistischen Quantentheorien, die einen Kollaps der Wellenfunktion beinhalten geschieht dieser Kollaps überall gleichzeitig. Allerdings ist es in einer relativistischen Theorie nicht mehr so einfach möglich überhaupt einen Begriff der Gleichzeitigkeit zu definieren. Für raumartig getrennte Ereignisse gibt es nur ein bestimmtes Bezugssystem in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig sind, in allen anderen Lorentz-Bezugsystemen sind die Ereignisse nicht gleichzeitig. Sobald die Theorie kausale Prozesse schneller als Licht zulässt wird es noch schlimmer: dann hängt auch die zeitliche Reihenfolge vom jeweiligen Bezugssystem ab. Die Wellenfunktion, die ein System aus mehreren Teilchen an raumartig getrennten Orten beschreibt, kollabiert bei einem Mess-

prozess instantan. In einer relativistischen Theorie kann sie allerdings nur gleichzeitig in einem bestimmten Bezugssystem, also entlang einer ebenen raumartigen Hyperfläche kollabieren. Die Frage ist, wie eine solche Hyperfläche ausgewählt werden kann, ohne die Lorentz-Invarianz zu brechen.
Eine Idee wäre, einen verzögerten Kollaps zu fordern, der sich entlang des Zukunfts-Lichtkegel des jeweiligen Messereignisses ausbreitet. Immerhin wurde auch die Newtonsche Gravitation zunächst instantan formuliert und in der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde die Gravitation dann mit einer entsprechenden Verzögerung beschrieben. Dadurch konnten die bestehenden Probleme gelöst werden. Leider lässt sich diese Idee beim Kollaps der Wellenfunktion nicht umsetzen, einfach deshalb, weil ein solcher verzögerter Kollaps zu spät kommen wurde, um die bestehenden Korrelationen zu erklären (vgl. Kapitel 3). Genauso lässt sich ein Kollaps entlang des Vergangenheits-Lichtkegel ausschließen, da diese nicht behebare Probleme, bezüglich kausaler Einflüsse zurück in die Vergangenheit hervorrufen (vgl. Hellwig und Kraus).[5]

In einer Quantentheorie mit Kollaps der Wellenfunktion besteht die Aufgabe, die Dynamik so zu entwickeln, dass die Ursachen für einen Kollaps der Wellenfunktion und auch der Kollaps selbst auf transparente, Lorentz-invariante und konsistente Art und Weise in die Theorie mit eingehen.

4.1.1 Hellwig & Kraus

Die Physiker Karl-Eberhard Hellwig und Karl Kraus haben ein kovariantes Gesetz für den Kollaps der Wellenfunktion vorgeschlagen, das zunächst einmal vielversprechend klingt:[13]
Sie fordern, dass die Wellenfunktion immer entlang des Vergangenheitslichtkegels des jeweiligen Messereignisses kollabiert. Dieser Vergangenheitslichtkegel ist selbstverständlich Lorentz-invariant und somit sollten sich keine Widersprüche zur Relativitätstheorie ergeben, obwohl wir eine bestimmte Hyperfläche ausgewählt haben, entlang der die Wellenfunktion kollabiert.
Leider scheitert auch dieser Ansatz. Um den Grund dafür nachvollziehen zu können, müssen wir einen kleinen Umweg gehen:[4]

Aharanov und Albert

Die Physiker Aharanov und Albert haben ein Verfahren entwickelt, das es uns ermöglicht, experimentell zu bestätigen, dass alle drei Komponenten des Gesamtspins eines Zwei-Teilchen Singlett Zustandes gleich null sind. Dieser Messvorgang ist nicht zerstörend, das heißt er lässt den Singlett-Zustand unberührt. Der Vorschlag von Hellwig und Kraus, dass die Wellenfunktion immer entlang des Vergangenheitslichtkegel kollabiert kann damit falsifiziert werden.
Die nicht-zerstörende Eigenschaft der Aharanov-Albert-Prozedur ist so zu verstehen: Eine solche Prozedur kann natürlich immer nur in einem bestimmten Bezugssystem gleichzeitig geschehen. In einem anderen Bezugssystem dauert sie eine gewisse Zeit und

in dieser Zeit kann der Singlett-Zustand zerstört werden, allerdings verlässt er den “Messapparat“ danach wieder im Ausgangszustand.
Die “Geschichte“ des Singlett Zustands kann also mit Hilfe der Aharanov-Albert-Prozedur verfolgt werden. Es werden dazu einfach mehrere Aharanov-Albert-Prozeduren in beliebig kleinen Zeitabständen in Serie geschaltet. Aufgrund der raumartigen Trennung der Teilchen, kann man immer zwei Bezugssyteme S und S’ finden, sodass in S die zugehörige Wellenfunktion zum Teilchen (L) zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ bereits kollabiert ist, wobei der Kollaps in S’ noch nicht stattgefunden hat.
Diese experimentell nachweißbaren “Geschichten“ des linken Teilchens (L) scheinen inkonsistent zu sein. Allerdings wird uns dennoch eine gewisse Konsistenz der Theorie gesichert, dadurch dass die Aharanov-Albert-Prozedur nicht zugleich in S und S’ durchgeführt werden kann. Eine Aharanov-Albert-Prozedur, die in S gleichzeitig ist, ist dies in S’ nicht mehr und zertört deshalb in S’ den Singlett-Zustand. Damit ist es in S’ keine Aharanov-Albert-Prozedur mehr. Die verschiedenen “Geschichten“ können also in gewisser Weise friedlich koexistieren.[11],[12]

Nun also zurück zum Vorschlag von Hellwig und Kraus: Wir betrachten wieder einen Singlett-Zustand aus zwei Teilchen. Der experimentelle Aufbau ist so, dass die Spins der beiden Teilchen (L,R) im Laborsystem gleichzeitig zu einer Zeit $t = t_0$ gemessen werden (direkt hinter den jeweiligen SGMen). Die Aharanov-Albert-Prozedur ermöglicht es uns aber nun unmittelbar vor diesen Messungen, sprich zu einer Zeit $t = t_0 - \epsilon$ (ϵ ist beliebig klein) zu verifizieren, dass alle Spinkomponenten des gesamten Systems gleich null sind:

$$\sigma_x^{tot} |\psi_{Singlett}\rangle = \sigma_y^{tot} |\psi_{Singlett}\rangle = \sigma_z^{tot} |\psi_{Singlett}\rangle = 0 \tag{4.1}$$

Im Bild von Hellwig und Kraus ist der Zustand des System zu dieser Zeit aber bereits in allen Gebieten der Raumzeit (durch den Kollaps entlang des Vergangenheitslichtkegels) entweder auf $|\uparrow\downarrow\rangle$ oder $|\downarrow\uparrow\rangle$ festgelegt. Für diese Zustände sind im Allgemeinen nicht alle Spin-Komponenten gleich null. Man kann diesen Zuständen keine diskreten Werte für alle Spinkomponenten zuordnen.[4]
Die Aharanov-Albert-Prozedur zeigt uns also, dass der Vorschlag von Hellwig und Kraus nicht funktioniert.

4.1.2 Kollaps entlang einer bestimmten Hyperfläche

Es muss also eine ebene raumartige Hyperfläche ausgesucht werden, entlang der die Wellenfunktion kollabiert. Allerdings darf die Lorentz-Invarianz dadurch nicht gebrochen werden. Leider gibt es, wie Maudlin in [5] zeigt keine zufällige, Lorentz-invariante Methode, wie diese Auswahl geschehen kann. Es bleiben also die folgenden Möglichkeiten, die aber alle zu verschiedenen Problemen führen:[5]

(i) Eine bevorzugte Familie an Hyperflächen wird zur Struktur der Raumzeit hinzugefügt:

Eine der grundlegendsten Forderungen der Relativitätstheorie war, dass die Metrik die einzige zusätzliche Struktur ist. *(i)* kann also nur realisiert werden, wenn die Grundlagen der Relativitätstheorie über Bord geworfen werden. Das versuchen wir aber gerade vermeiden.

(ii) Die Wahl des Bezugssystems wird durch den physikalischen Zustand der Quelle bestimmt:

In diesem Fall treten gleich mehrere Probleme auf: Erstens, kann die Quelle zum Zeitpunkt der Messung schon lange zerstört sein, wie soll sie dann zu Zeitpunkt der Messung ein Bezugssytem auswählen? Aber viel gravierender ist noch ein anderer Punkt: Es ist auch möglich, dass die Bellschen Ungleichungen durch durch Teilchen verletzt werden, die nicht aus der selben Quelle stammen.

(iii) Die Wahl des Bezugssystems wird durch den physikalischen Zustand der Teilchen/Detektor bestimmt:

Diese Option klingt zuerst einmal vielversprechend, denn auch in der klassischen Physik wird durch den Bewegungszustand mehrerer Teilchen ein bevorzugtes Bezugssystem definiert, nämlich das Schwerpunktsystem. In einer relativistischen Theorie sieht die Situation aber leider anders aus: Um ein Schwerpunktsystem zu bestimmen, muss man die Positionen der Teilchen und deren Bewegungszustand zu einer bestimmten Zeit festlegen. Diese Gleichzeitigkeit stellt im relativistischen Fall das Problem dar. Außerdem gibt es hier Situationen, in denen jedes Bezugssystem ein Schwerpunktsystem ist und wiederum andere in denen es gar keines gibt (betrachte hierzu ein einzelnes Photon).

(iv) Die Wahl des Bezugssystems wird durch den physikalischen Zustand aller Materie im Universum bestimmt:

Gleiche Argumentation wie bei *(iii)*. Die Verteilung von Materie im Raum und deren Bewegungszustand kann also nicht dazu dienen, ein bestimmtes Bezugssystem auszuwählen.

Insgesamt kommen wir also zu dem Schluss, dass man große Probleme bewältigen muss, wenn man eine solche Theorie formulieren will und dabei an den Grundprinzipien der Relativitätstheorie festhält.[5]

4.1.3 Abhängigkeit von der Hyperfläche

Ein Ausweg könnte sein, die Theorie so zu formulieren, dass die Hyperfläche vom jeweiligen Bezugssystem des Beobachters abhängt. Die Wellenfunktion kollabiert also immer entlang der Hyperfläche, deren Ereignisse im entsprechenden Bezugssystem gleichzeitig sind. Die statistischen Vorhersagen sind unabhängig von der Wahl der Hyperfläche, es werden also die gleichen Vorhersagen getroffen, egal welche Hyperfläche ausgewählt wird. Es ist dabei experimentell nicht beobachtbar, welche der Flächen der Gleichzeitigkeit für den Kollaps benutzt wurde, unsere Probleme diesbezüglich sind also rein theoretischer Natur.
Aber können wir das zulassen? Denn dann würden zwei Beobachter in zwei verschiedenen Bezugssystemen (S und S') zwei völlig verschiedene Geschichten über ein und den selben Vorgang erzählen. Erinnern wir uns dafür an das EPRB-Experiment mit zwei SGMen, die gleich orientiert sind. Der Beobachter in S beschreibt die Situation foldendermaßen: Das Spin$-\frac{1}{2}$ Teilchen auf der rechten Seite erreicht den SGM-R zuerst, daraufhin wird es, bestimmt durch einen stochastischen Prozess entweder nach oben oder unten abgelenkt. Die Wellenfunktion kollabiert in S instantan entlang einer ebenen, raumartigen Hyperfläche und legt damit den Spin des linken Teilchens eindeutig fest, dieser zeigt dann genau in die entgegengesetzte Richtung. Wenn nun das linke Teilchen auch den SGM-L erreicht, unterläuft es einem deterministischen Prozess, denn der Spin ist ja bereits durch den Kollaps der Wellenfunktion festgelegt.
Ein Beobachter in S' würde die Situation genau umgekehrt beschreiben. Ist es denn kein Widerspruch, dass zwei Beobachter die gleiche Sache komlett unterschiedlich erzählen? Welcher der beiden Prozesse stochastisch und welcher deterministisch abläuft hängt also vom Bezugssystem ab.Macht das Sinn? Die Antwort ist Ja, denn die verschiedenen Beobachter sprechen über verschiedene Dinge, nämlich über die Zeiten t und t'. Die Frage nach der "ersten" Messung hängt ja auch vom Bezugssystem ab. Die Hyperfläche der Gleichzeitigkeit ändert sich durch die Lorantz-Transformation und dieser Wechsel führt zu den verschiedenen Geschichten.
Beide Geschichten können im jeweiligen Bezugssystem experimentell gezeigt werden, aber nicht beide auf einmal! Das sichert uns eine gewisse Konsistenz der Theorie.
Gordon Fleming hat in seiner Arbeit *hyperplane dependent quantum field theory* eine Idee geliefert eine Lorentz-invariante Theorie für den Kollaps der Wellenfuntion zu formulieren. Er erzielt die Lorentz-Invarianz, indem er darauf besteht, dass der physikalische Zustand von der jeweiligen Hyperfläche abhängt. Der Spin der Teilchen im obigen Beispiel hängt davon ab, welche Messung zuerst stattfindet und damit auch davon, aus welchem Bezugssystem die Situation betrachtet wird. Wenn man also nach dem Spin von einem der beiden Teilchen fragt, dann ist diese Frage zu ungenau. Man muss die Hyperfläche festlegen, bezüglich der man diese Frage stellt. Die Wellenfunktion kollabiert in diesem Bild also entlang unendlich vieler Hyperflächen! Ist die Natur wirklich so verschwenderisch?
Die Theorie von Fleming ist Lorentz-invariant und konsistent, aber komplett gegen unsere physikalische Intuition. Sie würde unser physikalisches Weltbild von Grund auf revolutionieren.[5]

4.1.4 "Wellenfunktion" als Funktional

Wir haben bereits gesehen, dass die Hyperfläche, deren Raumzeitpunkte alle "gleichzeitig" sind, in jedem Bezugssystem eine Andere sein kann. Es ist also eine naheliegende Idee, die Wellenfunktion nicht mehr als Funktion von Ort und Zeit, sondern als Funktional von raumartigen, ebenen Hyperflächen in der Raumzeit aufzufassen.
Aharanov und Albert [14], sowie Roderich Tumulka [16] haben diese Idee untersucht. Sie sind dazu zwar unterschiedliche Weg gegangen, die sie im Wesentlichen aber zu der gleichen relativistischen Beschreibung des Kollapses der Wellenfunktion geführt haben. Letztendlich kann man diese Theorien als relativistische Erweiterung der Ghirardi-Rimini-Weber Theorie (GRW) verstehen. Darin geschieht der Kollaps der Wellenfunktion durch ein stochastisches Element in der Theorie und wird nicht durch irgendeinen Beobachter eingeleitet. Der Kollaps der Wellenfunktion ist hier also in der Theorie mit eingebaut.
Im Folgenden will ich den Weg skizzieren, den Aharanov und Albert gegangen sind: Sie stützen ihre Arbeit auf das Paper von Tomogana [15]. Die Theorie beinhaltet zwei mögliche Zeitentwicklungen. Zum Einen die unitäre Zeitentwicklung gemäß der Schrödingergleichung und zum Anderen den Kollaps der Wellenfunktion. Man muss beide Möglichkeiten für "Wellenfunktionale" formulieren.[4]

Unitäre Zeitentwicklung

Die Wellenfunktion hängt also von der gewählten Hyperfläche, bzw. dem gewählten Bezugssystem (vgl. Kapitel 4.1.3) ab. Die Hamilton-Dichte $\mathcal{H}$ generiert die Zeitwicklung und die generaliesierte Schrödingergleichung sieht dann folgendermaßen aus:

$$i\frac{\delta}{\delta\Sigma_x}\psi(\Sigma) = \mathcal{H}(x)\psi(\Sigma) \tag{4.2}$$

Dabei ist Σ die entsprechende raumartige Hyperfläche und $\delta\Sigma_x$ eine kleine Variation davon, wobei $\delta\Sigma_x$ den Punkt $x \in \mathbb{R}^4$ enthalten soll.
Der Wert der Wellenfunktion an einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^4$ ist unabhängig von der gewählten Hyperfläche. Das heißt es gilt für $x_0 \in \Sigma \cap \Sigma'$ Folgendes:

$$\psi_\Sigma(x_0) = \psi_{\Sigma'}(x_0) \tag{4.3}$$

Es lässt also nicht ablesen, welche Hyperfläche für die Beschreibung benutzt wird.
Die Tatsache, dass $\mathcal{H}(x)$ und $\mathcal{H}(x')$ für $x, x' \in \Sigma$ wegen der *lokalen Vertauschbarkeit* (gilt weil Σ raumartige Hyperfläche ist) kommutieren, sichert uns das die generalisierte Schrödingergleichung (eindeutig) intergrierbar ist.[4]

Kollaps der Wellenfunktion

Um einen Lorentz-invarianten Weg zu finden, den Kollaps der Wellenfunktion zu beschreiben, möchte ich zunächst den einfachen Fall eines ein-Teilchen Systems betrachten. Die Wellenfunktion dieses Teilchens soll überall verschwinden, außer in beliebig kleinen, räumlichen Umgebungen um die zwei Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ Zur Zeit $t = t_0$ wird eine Ortsmessung durchgeführt, woraufhin die Wellenfunktion kollabiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Messung ergeben hat, dass sich das Teilchen bei $\mathbf{x}_1$ befindet. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|\psi_{t<t_0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle + |x_2\rangle) \\
|\psi_{t>t_0}\rangle &= |x_1\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

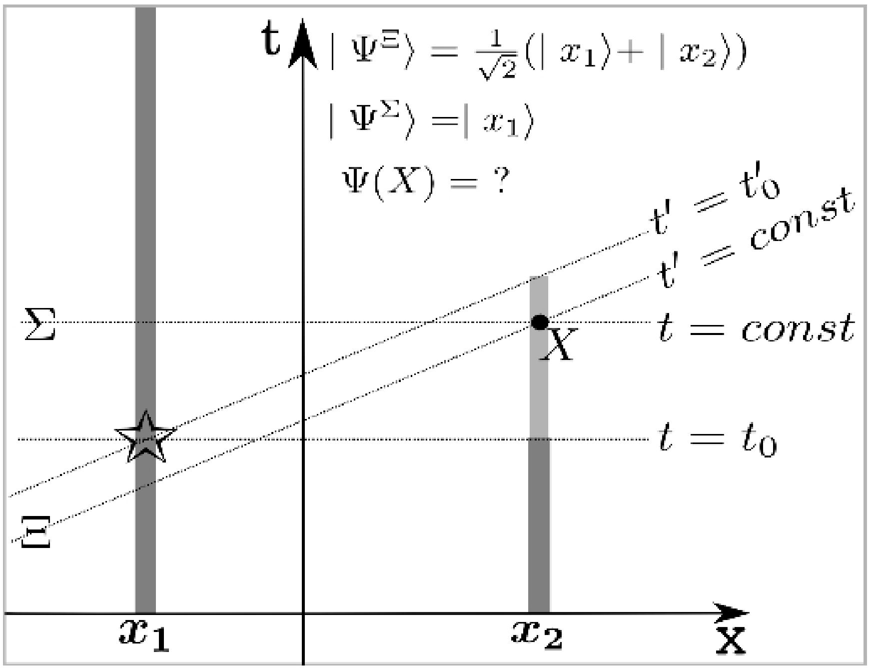

Abbildung 4.1: [4]

Es seien Σ und Ξ zwei raumartige Hyperflächen, deren Punkte jeweils alle "gleichzeitig" sind. Dabei soll Σ eine Gleichzeitigkeitsfläche nach der Messung und Ξ eine Gleichzeitigkeitsfläche vor der Messung sein. Der Raumzeitpunkt X soll in beiden Hyperflächen enthalten sein und im räumlichen Gebiet $\mathbf{x}_2$ sein (vgl. Abbildung 4.1). Die Wellenfunktion bezüglich Σ ist also bereits kollabiert, während sie sich bezüglich Ξ noch im obigen Überlagerungszustand befindet.

In dieser Sichtweise macht es keinen Sinn mehr nach $\psi(X)$ zu fragen, ohne sich auf irgendeine bestimmte Hyperfläche zu beziehen. (4.4) ist nicht mehr gültig, sobald man den Kollaps der Wellenfunktion betrachtet. Die Wellenfunktion ist abhängig von der jeweiligen Hyperfläche.

$$
\int\limits_{U_\epsilon^\Sigma(X)} \psi^\Sigma(x) d^3x = 0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}} = \int\limits_{U_\epsilon^\Xi(X)} \psi^\Xi(x) d^3x \tag{4.5}
$$

$\psi(X)$ alleine hat also keine Bedeutung mehr (vgl. Abhängigkeit von Hyperflächen). Es gilt:

$$\psi^{\Sigma}(X) = 0 \; aber$$
$$\psi^{\Xi}(X) \neq 0 \tag{4.6}$$

Das ist der Preis, den wir zahlen müssen, wenn wir eine Theorie entwickeln wollen, die selben Vorhersagen, wie die Standard-Quantenmechanik macht und wir trotzdem keine Zusatzstrukturen in der relativistischen Raumzeit einführen wollen.[4]
Wir haben die beiden Möglichkeiten für die Zeitentwicklung getrennt untersucht, aber wann tritt der Kollaps auf? Betrachte einen Beobachter, in seinem Bezugssystem hat die Messung noch nicht stattgefunden. Allerdings ist durch das Bezugssystem indem er sich befindet eine eindeutige Familie von raumartigen Hyperflächen festgelegt, deren Elemente jeweils gleichzeitig sind. Der Beobachter befindet sich auf einer davon. Der Beobachter bewegt sich natürlich vorwärts in der Zeit. In diesem Bild kann man sich das so vorstellen, dass “seine“ Hyperfläche stetig in eine andere Hyperfläche aus obiger Familie übergeführt wird. Sobald nun das Messereigniss durch diese stetige Umformung gekreuzt wird, tritt der Kollaps der Wellenfunktion entlang dieser Hyperfläche ein. Ansonsten entwickelt sie sich gemäß der unitären Zeitentwicklung. Der Kollaps geschieht also separat für die verschieden Hyperflächen und jeweils instantan.[14]

Mehr als ein Teilchen

Bisher haben wir immer nur ein Teilchen betrachtet. Wenn unser Ziel ist, eine allgemeine Theorie zu entwickeln, dann reicht das bei Weitem noch nicht aus. Die Wellenfunktion lebt auf dem Konfigurationsraum, dieser ist für ein Teilchen isomorph zum physikalischen Raum. Für mehrere Teilchen gibt es im Allgemeinen keinen solchen Isomorphismus. Damit lässt sich die Theorie nicht so einfach auf mehrere Teilchen erweitern.[4]
Nun wollen wir also wieder versuchen einen Singlett-Zustand aus zwei Teilchen zu beschreiben. Dieser Zustand lässt sich nicht mehr durch eine Wellenfunktion als Funktion von der Raumzeit darstellen. Zur einer Zeit $t = t_0$ wird der Spin des rechten Teilchens (R) gemessen und der Singlett Zustand kollabiert in den Zustand $|\uparrow\downarrow\rangle$. Die Beschreibung geschieht mit Hilfe der Dichtematrix und sieht folgendermaßen aus:

$$\rho^{\Sigma} = |\psi_{Singlett}\rangle \langle\psi_{Singlett}| \tag{4.7}$$
$$\rho^{\Sigma}_{red\ (L)} = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle \langle\uparrow|^{(L)} + |\downarrow\rangle \langle\downarrow|^{(L)}\Big) \tag{4.8}$$

Dabei ist $\rho^{\Sigma}_{red\ (L)}$ die reduzierte Dichtematrix des linken Teilchens (im EPRB Experiment). Sie berechnet sich aus der teilweise Spur (über den Hilbertraum des rechten Teilchens (R)) der Dichtematrix des gesamten Systems.
Sei nun Ξ eine andere Hyperfläche die sich nur in einem kleinen Bereich von Σ unterscheidet und zwar so, dass bezüglich Ξ die Spinmessung von R bereits stattgefunden hat. Das heißt die Beschreibung bezüglich Ξ sieht dann folgendermaßen aus:

$$\rho^{\Xi} = |\uparrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\downarrow| \tag{4.9}$$
$$\rho^{\Xi}_{red\ (L)} = |\uparrow\rangle \langle\uparrow|^{(L)} \tag{4.10}$$

Man sieht also das $\rho^{\Xi}_{red\ (L)} \neq \rho^{\Sigma}_{red\ (L)}$ gilt. Die beiden Dichtematrizen beschreiben also offensichtlich verschiedene physikalische Situationen.[4]

Wie man sieht, hängt die Wellenfunktion (bzw. die Dichtematrix) von der gewählten Hyperfläche, bzw. vom jeweiligen Bezugssystem ab. Viele Physiker sehen die Wellenfunktion als "etwas das da ist" und bringen sie dadurch mit Materie in Verbindung (etwas das die eine Massendichte erzeugt). Eine solche Interpretation ist im relativistischen Fall nicht möglich, solange wir keine bevorzugten Bezugssysteme einführen, denn dann wäre die Massendichte nicht Lorentz-invariant. In verschiedenen Lorentz-Systemen würde die Massenverteilung also jeweils unterschiedlich aussehen. Das wäre in keinster Weise akzeptabel! In einer relativistischen Welt sollte zumindest die Verteilung von Materie Lorentz-invariant sein. Die Wellenfunktion kann dann also kein Element unserer physikalischen Welt sein.[4]

Flash Ontologie

Eine realistische Theorie muss immer über irgendetwas in der realen Welt sein ($\mathbb{R}^4$) sein. Wie kann also der Realismus in diese Theorie mit eingebaut werden? Eine Möglichkeit ist es die Wellenfunktion mit Materie in Verbindung zu bringen. Diese Möglickeit wird in dem Papier [21] umgesetzt: Hier wird die Massendichte entlang des Rückwärtslichtkegels definiert (ähnlich zum Vorschlag von Hellwig und Kraus, die den Kollaps der Wellenfunktion entlang des Rückwärtslichtkegels postulieren). Dadurch wird die Lorentz-Invarianz erzielt.
Einen weiteren Vorschlag macht Roderich Tumulka in seiner rGRWf Theorie [16]. Sie ist eine relativistische Version der GRW Theorie, in welcher es, zusätzlich zur Dynamik der Schrödingergleichung zufällig auftretende Lokalisierungs-Prozesse gibt. In der rGRWf Version der Theorie nennt man diese Lokalisierungs-Ereignisse Flashes und sie erzeugen Materie. Dadurch ist die Theorie über "Etwas" in der physikalischen Welt und ist damit realistische. Bell beschreibt die Situation folgendermaßen:[20]

> *"So we can propose these events as the basis of the "local beables" of the theory. These are mathematical counterparts in the theory to real events at definite places and times in the real world (as distinct from the many purely mathematical con- structions that occur in the working out of physical theories, as distinct from things which may be real but not localized, and as distinct from the "observables" of other formulations of quantum mechanics [...]. A piece of matter then is a galaxy of such events."*

4.2 Lorentz-Invarianz in Theorien ohne Kollaps der Wellenfunktion

Wie bereits angesprochen wurde, gibt es auch Quantentheorien, die ohne den Kollaps der Wellenfunktion auskommen. Man könnte hoffen, dass dies die Lösung aller Probleme ist, da uns der Kollaps so viele Probleme bereitet hat, als wir versucht haben ihn

Lorentz-invariant zu beschreiben. Leider benutzen die Theorien ohne Kollaps den Begriff der Gleichzeitigkeit in einer Art und Weise, in der es wieder neue Probleme bei der Vereinigung mit der Relativitätstheorie gibt. Ich möchte die Problematik kurz am Beispiel der Bohmschen Mechanik erläutern.
Die Bohmsche Mechanik ist deterministisch und mindestens ein Messergebnis beim EPRB-Experiment wird nicht nur durch den Ausgangszustand der Teilchen und die Orientierung des SGM bestimmt, sondern auch durch die Orientierung des raumartig entfernten SGM (vgl. Verletzung der Bellschen Ungleichungen). Im nicht-relativistischen Fall ist eine solche Beschreibung unproblematisch. Die "erste" Messung beeinflusst die Zweite. Im relativistischen Fall nehmen verschiedene Beobachter in zwei verschiedenen Bezugssystemen (S und S'), die so gewählt sind, dass in S das rechte Teilchen den SGM-R zuerst erreicht und in S' das linke Teilchen zuerst am SGM-L ankommt. Die beiden Beobachter erzählen dann verschiedene, inkonsistente Geschichten über den gleichen Vorgang. In S ändert sich die Vorhersage für den Ausgang der Messung auf der linken Seite, wenn die Orientierung des SGM-R (erste Messung) geändert wird. In S' findet aber die Messung auf der linken Seite zuerst statt und ihr Ausgang kann damit nicht von der Orientierung des SGM-R abhängen. In einer deterministischen Theorie widerspricht das aber den Prinzipien der Relativitätstheorie, weil die jeweilige Situation, die von den verschiedenen Beobachtern gesehen wird vom gewählten Bezugssystem abhängt. Die zugrundeliegenden Konzepte der Bohmschen Mechanik sind also zunächst nicht mit den Grundprinzipien der speziellen Relativitätstheorie verträglich.[5]

Konfigurationsraum

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, lebt die Wellenfunktion auf dem Konfigurationsraum und die Relativitätstheorie ist im physikalischen Raum $\mathbb{R}^4$ formuliert. Während für eine Einteilchen-Theorie der Konfigurationraum isomorph zum physikalischen Raum ist, gibt es keinen solchen Isomorphismus für alle Konfigurationsräume, die mehr als ein Teilchen beschreiben. Aber wie sollen wir dann die Wellenfunktion, die Teilchenbahnen in der Bohmschen Mechanik bestimmt, in einen relativistischen Rahmen, also in der physikalischen Welt ($\mathbb{R}^4$) einbetten, wenn es keinen solchen Isomorphismus gibt.
Ein weiteres Problem ist, dass die Elemente im Konfigurationsraum physikalische Zustände zu einer *bestimmten Zeit* sind. Das Konzept einer "Konfiguration" an sich ist nicht Lorentz-invariant.
Ein gutes Beispiel um das zu verstehen, ist ein System aus einem Auto und einem Tunnel: In Bezugsystem des Tunnels ist das Auto vollständig im Tunnel (Konfiguration: Auto ist vollständig im Tunnel), wenn sich das Auto aber relativ zum Tunnel schnell genug bewegt, dann erscheint im Bezugssystem des Autos der Tunnel so verkürzt (Längenkontraktion), dass das Auto nicht mehr in ihn hinein passt (die Konfiguration ist dann: vorderes/hinteres Ende des Autos ist außerhalb des Tunnels). Wie man sieht ist die Konfiguration also an sich nicht Lorentz-invariant.
Wenn man die Wellenfunktion also ernst nehmen will, egal ob man ob man seine Theorie mit oder ohne Kollaps formulieren will, muss man dieses Problem beachten.[5]

4.3 Hypersurface Bohm-Dirac Modelle (HBDM)

4.3.1 Grundlagen

In der Bohmschen Mechanik gibt es neben der Schrödingergleichung keine zusätzliche Gleichungen, die die Zeitentwicklung beschreiben. Allerdings muss es dann, wie wir bereits gesehen haben neben der Wellenfunktion sogenannte versteckte Parameter geben. In der nicht-relativistischen Bohmschen Mechanik sind diese versteckten Parameter die Teilchenpositionen $\mathbf{Q}_k$ ($k = 1, \ldots, N$) für N Teilchen. Die Bewegungsgleichung für die Teilchenpositionen ergibt sich auf natürliche Art und Weise aus der Schröndigerentwicklung. Sie liefert uns eine Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{q}, t) = |\psi(\mathbf{q}, t)|^2$ mit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N}$:

$$\partial_t \rho(\mathbf{q}, t) - \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{q}, t) = 0 \tag{4.11}$$

Dabei ist $\mathbf{j} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3N}$ der Strom und es gilt für N Teilchen mit jeweils der gleichen Masse m:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{q}, t) &= \frac{1}{2mi}\Big(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\Big) \\ &= \frac{1}{m} \operatorname{Im}\Big(\psi^* \nabla \psi\Big) \\ &= \frac{\rho(\mathbf{q}, t)}{m} \operatorname{Im}\Big(\frac{\nabla \psi}{\psi}\Big) =: \rho(\mathbf{q}, t) \mathbf{v}^{\psi}(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

In der Bohmschen Mechanik wird das Bohmsche Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}^{\psi}(\mathbf{q}, t)$ wirklich als Geschwindigkeitsfeld der Teilchenkonfigurationen behandelt. Das Bohmsche Geschwindigkeitsfeld bestimmt also die Trajektorien der Teilchen, es gilt:

$$\mathbf{v}^{\psi} = \frac{1}{m} \operatorname{Im}\Big(\frac{\nabla \psi}{\psi}\Big) = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \tag{4.13}$$

Die Position des k-ten Teilchens ist dann durch folgende Bewegungsgleichung fesgelegt:[4],[17]

$$\frac{d\mathbf{Q}_k}{dt} = \frac{1}{m} \operatorname{Im}\Big(\frac{\nabla_k \psi}{\psi}\Big) \tag{4.14}$$

Diese Theorie ist von vorne herein eine realistische Theorie, denn sie beschreibt die Teilchenbahnen, welche offensichtlich Teil unserer realen Welt sind.

4.3.2 Bohm-Dirac Modell

Bohm wollte eine relativistische Version der Bewegungsgleichung für die Trajektorien (4.14) formulieren. Er hat dafür die N-Teilchen Dirac-Gleichung betrachtet. (Für $N = 1$ sind ihre Lösungen kovariant.) Um die Notation zu erleichtern, betrachten wir im

Folgenden nur Teilchen, die alle dieselbe Masse m und dieselbe elektrische Ladung e haben.

$$i\gamma_k^0 \frac{\partial \psi(\mathbf{q}, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} \Big(-i\boldsymbol{\gamma}_k \cdot \nabla_k - e\boldsymbol{\gamma}_k \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}_k, t) + e\gamma_k^0 \Phi(\mathbf{q}_k, t) + m \Big) \psi(\mathbf{q}, t) \tag{4.15}$$

Das entsprechende Bohmsche Geschwindigkeitsfeld sieht dann folgendermaßen aus:

$$\frac{d\mathbf{Q}_k}{dt} = \frac{\mathbf{j}_k(\mathbf{Q}, t)}{\rho(\mathbf{Q}, t)} = \left. \frac{\overline{\psi}(\gamma_1^0 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\gamma}_k \otimes \cdots \otimes \gamma_N^0)}{\overline{\psi}\gamma^0\psi} \right|_{(\mathbf{Q}, t)} \tag{4.16}$$

(Bohm-Dirac Gesetz)

Dabei ist $\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ die Dirac-Adjungierte und γ_k^i $(i = 1, 2, 3)$ ist die i-te Dirac-Matrix, die auf das k-te Teilchen wirkt. Außerdem gilt folgende Notation: $\boldsymbol{\gamma}_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2, \gamma_k^3)$ und $\gamma^0 = \otimes_{k=1}^N \gamma_k^0$. Die Konfiguration der Teilchen $(\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_N)$ ist zu einer bestimmten Zeit definiert. Das Bohm-Dirac Modell benutzt also immer ein ausgezeichnetes Bezugssystem und ist damit im Allgemeinen nicht Lorentz-invariant.

N = 1:

Trotzdem ist das Modell für $N = 1$, genauso wie die Dirac-Gleichung Lorentz-invariant. Die Bewegungsgleichung (4.16) kann dann kovariant formuliert werden:

$$\frac{dX^\mu}{ds} \sim j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.17}$$

Der Viererstrom $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ ist der einfachste Vierervektor[4], den man aus dem Dirac-Spinor ψ konstruieren kann und $s \in \mathbb{R}$ ist eine skalare Parametrisierung der Weltlinie $X^\mu(s)$. Der Parameter s hat keine instrinsische physikalische Bedeutung. Die Teilchenbahnen sind also nicht durch die Länge des Viererstroms j^μ bestimmt, sondern durch dessen Richtung. Der Dirac-Strom ist immer tangential zur Teilchenbahn.[4]
Die Kontinuitätsgleichung (4.11) nimmt dann eine sehr einfach Form an:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{4.18}$$

N > 1:

Die Situation wird deutlich schwieriger, wenn wir mehr als ein Teilchen betrachten. Die Bewegungsgleichung (4.16) ist dann ein Gesetz, das nur in einen bestimmten Bezugssystem gilt.
Die Materie sei in S gemäß $|\psi|^2$ (Bornsche Regel) verteilt, in S' ist sie dann aber im Allgemeinen nicht gemäß $|\psi'|^2$ (dabei ist ψ die Wellenfunktion in S und ψ' die entsprechende Wellenfunktion in S') verteilt. Allerdings ist es nicht möglich dieses ausgezeichnete Bezugssystem experimentell zu bestimmen. Die Messergebnisse sind in allen Bezugssystemen die Gleichen. Bohm behauptet also das dieses ausgezeichnete Bezugssystem,

[4] Das $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ ein Vierervektor ist wird zum Beispiel in [18] bewiesen

das die Theorie offenbar benutzt, in der Theorie "versteckt" ist. Es kann experimentell nicht sichtbar gemacht werden und damit ist die Theorie aus der Sicht eines Beobachters Lorentz-invariant.
Für Produktzustände ist das Bohm-Dirac Modell immer Lorentz-invariant (also auch für $N > 1$).
Sei

$$\psi(\mathbf{q}, t_1, \ldots, t_N) = \prod_{k=1}^{N} \varphi_k(\mathbf{q}_k, t_k) \tag{4.19}$$

Lösung der Multitime-Dirac-Gleichung

$$i\gamma_k^\mu \Big(\partial_{\mu,k} - ieA_\mu\Big)\psi = m\psi, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{4.20}$$

dann folgt

$$i\gamma_k^\mu \Big(\partial_{\mu,k} - ieA_\mu\Big)\varphi_k = m\varphi_k, \qquad \forall k = 1, \ldots, N \tag{4.21}$$

und die Bewegungsgleichung nimmt dann folgende Form an:

$$\frac{d\mathbf{Q}_k}{dt_k} = \frac{\mathbf{j}_k(\mathbf{Q}_k, t_k)}{\rho(\mathbf{Q}_k, t_k)} = \left.\frac{\overline{\varphi}_k \boldsymbol{\gamma}_k \varphi_k}{\overline{\varphi}_k \gamma_k^0 \varphi_k}\right|_{(\mathbf{Q}_k, t_k)} \tag{4.22}$$

Sie ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems und damit Lorentz-invariant. Allerdings genügt uns das nicht, denn die Verletzung der Bellschen Ungleichung geschieht durch vershränkte Zustände, diese lassen sich nicht als Produktzustände schreiben.[4],[17]

4.3.3 Hypersurface-Bohm-Dirac Modelle (HBDM)

Nun wollen wir uns auch verschränkten Wellenfunktionen widmen. Im Folgenden sei ψ also ein verschränkter Zustand. Die Bewegungsgleichung muss auch für solcheänkte Zustände kovariant, sprich ohne Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem formuliert werden. Um das zu erzielen betrachten wir die Wellenfunktion ψ für das System aus N Teilchen im Multitime Formalismus, ψ erfüllt dann die Multitime-Dirac-Gleichung (4.19).
Im Vergleich zu normalen Dirac-Gleichung (4.15) fällt auf, dass in (4.19) kein Potential ϕ steht. In (4.15) konnte das noch einfach hinzugefügt werden, aber im Multitime Formalismus, ist es erstmal nicht klar wie ein solches Potential mit eingebaut werden kann. Diese Theorie erlaubt es uns also nicht wechselwirkende Teilchen zu beschreiben.
Der entsprechende Fluss der aus der Multitime-Dirac-Gleichung hervorgeht ist dann genauso wie die Wellenfunktion nicht mehr separierbar. Es gilt

$$j_k^\mu(\mathbf{q}_1, t_1, \ldots, \mathbf{q}_N, t_N) = \overline{\psi}\Big(\gamma_1^0 \otimes \cdots \otimes \gamma_k^\mu \otimes \cdots \otimes \gamma_N^0\Big)\psi \tag{4.23}$$

Wir müssen also irgendwie die Geschwindigkeit des k-ten Teilchens zur Zeit t_k durch die N-1 Tupel $(\mathbf{Q}_j, t_j)$ beschreiben. Im Bohm-Dirac Modell wird das durch Flächen

der Gleichtzeitigkeit realisiert, auf welchen $t_1 = t_2 = \cdots = t_N$ gilt. In diesem Fall reduziert sich die Multitime-Dirac-Gleichung zur normalen Diracgleichung (4.15). Diese Einschränkung auf eine bestimmtes Bezugssystem kann man in den Strom mit einbauen, indem man $\gamma_k^0 = \gamma_k^\mu \eta_\mu$ schreibt. Das Vierer-Vektorfeld η^μ wählt dann immer die null-Komponente des Vierervektors γ^μ im jeweiligen Bezugssystem aus, das heißt η^μ ist der Normalvektor auf der Gleichzeitigkeitsfläche im entsprechenden Bezugssystem und zeigt in die Zukunft.[4],[17]
Damit haben wir den Dirac-Strom

$$j_k^\mu(\mathbf{q}_1, t_1, \ldots, \mathbf{q}_N, t_N) = \overline{\psi}\Big((\gamma_1^\nu \eta_\nu) \otimes \cdots \otimes \gamma_k^\mu \otimes \cdots \otimes (\gamma_N^\nu \eta_\nu)\Big)\psi \tag{4.24}$$

kovariant formuliert. Damit können wir die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte als $\rho = j_k^\mu \eta_\mu$ schreiben. Für die Trajektorien der Teilchen gilt dann also (wie in (4.16)):

$$\frac{dX_k^\mu}{dt} = \frac{j_k^\mu}{j_k^\mu \eta_\mu} \tag{4.25}$$

Daher $j_k^\mu \eta_\mu$ unabhängig von k ist, kann die Bewegungsgleichung neu parametrisiert werden, sodass

$$\frac{dX_k^\mu}{ds} = j_k^\mu \tag{4.26}$$

gilt. Wir haben also eine kovariante Bewegungsgleichung gefunden.[17]
Im Hypersurface-Bohm-Dirac Modell wird die Bewegungsgleichung aus dem Bohm-Dirac Modell so erweitert, dass die Formulierung nicht mehr in einem bevorzugten Bezugssystem geschieht, sondern von einer beliebigen Blätterung $\mathcal{F}$ des Minkowski-Raums in raumartige Hyperflächen abhängt. Dabei ist das Vektorfeld $\eta^\mu(x)$ durch die Blätterung $\mathcal{F}$ gegeben.
Es gibt mehrere Varianten der Hypersurface-Bohm-Dirac Modellen, denn bis jetzt haben wir noch keine bestimmte Blätterung $\mathcal{F}$ ausgesucht.

Das Einzige was an dieser Theorie dem Gedanken der Relativität widersprechen könnte ist die Blätterung $\mathcal{F}$, denn sie stellt in gewisser Weise eine zusätzliche Struktur in der Raumzeit dar, weil sie eine Art zeitliche Reihenfolge in ihr festlegt. Allerdings kann sie so gewählt werden, dass sie durch ein kovariantes Gesetz gegeben wird. Das ist zunächst einmal die Grundvoraussetzung für eine relativistische Theorie. Es lässt sich aber dennoch diskutieren, ob das wirklich ausreicht, um von einer echt relativistischen Theorie sprechen zu können.[4]
Die Lorentz-Invarianz, die im Hypersurface-Bohm-Dirac Modell erzielt wird, ist nur dann wirklich ernst zu nehmen, wenn man die Blätterung $\mathcal{F}$ als eine *dynamische* Größe betrachtet und nicht *absolut* sieht.[17]
Man sieht also, dass es auch in diesem Modell noch Probleme gibt, die es zu lösen gilt.

5 Fazit

Insgesamt haben wir bis jetzt gesehen, dass eine Einbettung der Quantenmechanik in einen relativistischen Rahmen zwar nicht von vorne herein unmöglich ist, aber egal von welcher Seite man sich nähert, stößt man auf Probleme. Man hat die Wahl: Entweder muss man einen Teil unseres bestehenden Weltbilds oder die Grundprinzipien der Relativitätstheorie aufgeben. Beides fällt uns extrem schwer, da sich beides bisher sehr bewährt hat. Irgendetwas muss dennoch nachgeben! Es gibt verschiedene Ansätze für eine relativistische Quantentheorie, aber sie sind noch nicht vollkommen ausgereift (z.B. HBDM, rGRWf). Allerdings sind einige vielversprechende Ansätze dabei.

Anhang: Singlett Zustand

Die Wellenfunktion eines Singlett Zustands aus zwei Teilchen (1) und (2) (ohne die Ortsabhängigkeit) ist

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle^{(1)} |\downarrow\rangle^{(2)} + |\downarrow\rangle^{(1)} |\uparrow\rangle^{(2)}\Big)$$

Die Wellenfunktion sieht in alle Richtungen gleich aus und der Gesamtspin dieses Zustandes ist null, das heißt es gilt:

$$\langle\psi_s| \left(\mathbf{a}\cdot\sigma^{(1)} \otimes E + E \otimes \mathbf{a}\cdot\sigma^{(2)}\right) |\psi_s\rangle = 0$$

Das ist durch einfache Rechnung nachzuvollziehen (z.B. in [1]). E ist dabei die Einheitsmatrix.
Nun betrachten wir die Korrelationen

$$E^{\psi}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \langle\psi_s| \, \mathbf{a}\cdot\sigma^{(1)} \otimes \mathbf{a}\cdot\sigma^{(2)} \, |\psi_s\rangle$$

Dieser Ausdruck ist bilinear in $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ und rotationssymmetrisch, es muss deshalb $E^{\psi}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ gelten und für $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ ist $E^{\psi}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = -1$, da die Spins der beiden Teilchen für einen Singlett Zustand genau entgegengesetzt sind. Insgesamt gilt also

$$E^{\psi}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

Außerdem gilt mit

$$\mathcal{P}(X^{(1)}_{\mathbf{a}} = -X^{(2)}_{\mathbf{b}}) =: \mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$$

aufgrund der Rechenregeln f§r Wahrscheinlichkeiten

$$E^{\psi}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = -\mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} + (1 - \mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}})$$

Daraus folgt direkt

$$\mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

Wenn nun $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ so gewählt sind, dass sie jeweils einen 120 Winkel miteinander einschließen, dann folgt:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{1}{4} \qquad \mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{c}} = \frac{1}{4} \qquad \mathcal{P}_{\mathbf{b},\mathbf{c}} = \frac{1}{4}$$

(wobei die Rechnung für $\mathcal{P}_{\mathbf{a},\mathbf{c}}$ und $\mathcal{P}_{\mathbf{b},\mathbf{c}}$ analog gehen).[1]

Literaturverzeichnis

[1] Detlef Dürr, Stephan Teufel, *Bohmian Mechanics*, S. 201ff, Springer Verlag, 2009,
ISBN-13: 9783540893431

[2] David Z. Albert, Rivka Galchen, *Bedroht die Quantenverschränkung Einsteins Theorie?*, Schattenblick Theorie 036, 2009
http://www.schattenblick.de/infopool/natur/physik/npthe036.html

[3] Daniel Salart, Augustin Baas, Cyril Branciard, Nicolas Gisin, Hugo Zbinden, *Testing the speed of spooky action at a distance.* In: Nature. 454, 2008, S. 861Ð864.

[4] Christian Beck, *Wavefunctions and Minkowski Space-Time*, Ludwig-Maximilians Universität München, Diplomarbeit,
http://www.mathematik.uni-muenchen.de~beck/CollapseInMbig.pdf

[5] Tim Maudlin, *Quantum Non-Locality and Relativity*, John Wiley and Sons, 2011, ISBN 1444331264, 9781444331264

[6] J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. Collected papers on quantum philosophy

[7] D. Howard, *Einstein on Locality and Separability*, Studies in History and Philosophy of Science 16, (1985), 171-201

[8] GianCarlo Ghirardi, *Entanglement, Nonlocality, Superluminal Signaling and Cloning*, Advances in Quantum Mechanics, Prof. Paul Bracken (Ed.), 2013,
ISBN: 978-953-51-1089-7, InTech, DOI: 10.5772/56429.
http://www.intechopen.com/books/advances-in-quantum-mechanics/entanglement-nonlocality-superluminal-signaling-and-cloning

[9] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Experimental Tests of Bells Inequality using time-varying Analyzers*, Physical Review Letters, 1982

[10] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Despriction of Physical Reality Be Considered Complete?*, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1935

[11] Aharonov, Y., and Albert D., *States and observables in relativistic quantum field theories*, Physical Review D 21, 12 (1980), 3316-3324.

[12] Aharonov, Y., and Albert D., *Can we make sense out of the measurement process in relativistic quantum mechanics?*, Physical Review D 24, 2 (1981), 359-370.

[13] K. Hellwig, K. Kraus, *Formal description of measurements in local quantum field theory*, Physical Review D 1, 2 (1970), 566-571.

[14] Y. Aharonov, and D. Albert, *Is the usual notion of time evolution adequate for quantum-mechanical systems?* II. Relativistic considerations. Physical Review D 29, 2 (1984), 228-234.

[15] S. Tomonaga, *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*, Progress of Theoretical Physics 1, 2 (1946), 27-42.

[16] R. Tumulka, *A relativistic version of the Ghirardi-Rimini-Weber model*, J. Stat. Phys. 125, 4 (2006), 825-844.

[17] D. Dürr, S. Goldstein, N. Zanghi, *Quantum Physics Without Quantum Philosophy*, Springer Verlag, 2013, ISBN 978-3-642-30689-1

[18] D. Tong, *Quantum Field Theory*, University of Cambridge Part III Mathemathical Tripos, 2007
`http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf`

[19] M. Smolla, *Understanding Nonlocality*, Bachelorarbeit, Ludwig-Maximilians Universität, 2013

[20] J. S. Bell, *Are there quantum jumps?* In Schr?odinger (London, 1987). Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, S. 41Ð52.

[21] D. Bedingham, D. Dürr, G. Ghirardi, S. Goldstein, R. Tumulka, N. Zanghi, *Matter Density and Relativistic Models of Wave Function Collapse*, 2012, arXiv:1111.1425v3,
`http://arxiv.org/pdf/1111.1425v3.pdf`

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne benutzung anderer als der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe.

München, den