Gernot Bauer

Ein Existenzsatz für die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik

Dissertation
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

April 1997

1. Berichterstatter: Prof. Dr. D. Dürr
2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Spohn

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Juni 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Problem der Existenz von Lösungen für die Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik.

Die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik ist eine physikalische Theorie für die Bewegung elektrisch geladener Punktteilchen. Sie wurde in den vierziger Jahren von John A. Wheeler und Richard P. Feynman als Alternative zur herkömmlichen Maxwell-Lorentz-Elektrodynamik vorgeschlagen. Die Dynamik der Teilchen unterliegt einem lorentzinvarianten Kraftgesetz. Dabei wird die Wechselwirkung der Teilchen nicht durch elektromagnetische Felder vermittelt, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, sondern es besteht eine direkte relativistische Fernwechselwirkung der Teilchen untereinander. Die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik macht also im Gegensatz zur Maxwell-Lorentz-Elektrodynamik keinen Gebrauch vom Begriff des elektromagnetischen Feldes: sie ist eine reine Teilchentheorie.

Infolge der relativistischen Fernwechselwirkung handelt es sich bei den Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik um Funktionaldifferentialgleichungen mit nacheilenden und vorauseilenden zeitlichen Argumenten. Die zu irgendeinem Zeitpunkt auf eines der Teilchen wirkende Kraft hängt ab vom Verhalten der übrigen Teilchen sowohl zu früheren als auch zu späteren Zeitpunkten. Diese retardierten und avancierten Zeitpunkte sind durch die Trajektorien der Teilchen implizit definiert.

Differentialgleichungen von der Struktur der Wheeler-Feynman-Bewegungsgleichungen wurden in der mathematischen Literatur bislang nicht untersucht. Insbesondere gab es bisher keinerlei Aussagen über die Existenz von Lösungen dieser Gleichungen. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die spezielle Situation zweier sich gegenseitig abstoßender Punktladungen, deren Bewegung im dreidimensionalen Raum entlang einer Geraden verläuft. Wir beweisen einen Existenzsatz für die zugehörigen Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik. Wir zeigen auch, wie sich sämtliche Lösungen dieser Gleichungen anhand ihres asymptotischen Verhaltens klassifizieren lassen. Es handelt sich hierbei um die ersten rigorosen Resultate zu den Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Theorie und damit zum Zweikörperproblem der klassischen Elektrodynamik überhaupt.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. Kapitel I dient der Einführung. Es hat eine kurze Darstellung der klassischen Elektrodynamik zum Inhalt, wobei zunächst in §1 die Maxwell-Lorentz-Theorie und anschließend in §2 die Wheeler-Feynman-Theorie behandelt wird. Zum Abschluß des Kapitels motivieren wir die mathematische Problemstellung und leiten damit zu Kapitel II über, dem Hauptteil der Arbeit. Dort stellen wir zunächst in §3 die untersuchten Gleichungen vor. Der anschließende §4 ist der Festlegung unseres Lösungsbegriffes gewidmet. In §5 verschaffen wir uns ein qualitatives Bild vom Verhalten etwaiger Lösungen der betrachteten Gleichungen, indem wir deren asymptotisches Verhalten untersuchen. Die eigentliche Existenztheorie beginnt in §6, wo wir die Existenz bedingter Lösungen beweisen. Hierbei handelt es sich um Funktionen, die nur in einem eingeschränkten Sinne die Bewegungsgleichungen erfüllen. Mit ihrer Hilfe konstruieren wir im abschließenden §7 Lösungen der Bewegungsgleichungen im eigentlichen Sinne und gelangen so zu unserem zentralen Existenzsatz.

Danksagung. Ich danke Prof. Dr. Detlef Dürr sehr herzlich für die Anregung und intensive Betreuung dieser Arbeit, für die unzähligen lehrreichen Diskussionen und sein großes persönliches Engagement. Gedankt sei Prof. Dr. Herbert Spohn, Folker Schamel, Dr. Karin Berndl und Prof. Dr. Nino Zanghí für wertvolle Hinweise und Anregungen. Finanziell unterstützt wurde ich durch ein Promotionsstipendium der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Graduiertenkollegs „Mathematik im Bereich ihrer Wechselwirkung mit der Physik". Ein besonderer Dank gilt meiner Frau und unserer kleinen Tochter für verständnisvolle Hilfe und Ermunterung.

Kapitel I

Klassische Elektrodynamik

Dieses einführende Kapitel hat eine kurze Darstellung der klassischen Elektrodynamik zum Inhalt. Im Vordergrund steht die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik. Hierbei handelt sich um eine relativistische Theorie für die Bewegung geladener Punktteilchen (vgl. [1],[2]). Im Rahmen dieser Theorie wird die Wechselwirkung der Punktladungen nicht durch elektromagnetische Felder vermittelt, sondern es besteht eine direkte Fernwechselwirkung der Teilchen untereinander.

Die wesentlichen Merkmale der Wheeler-Feynman-Theorie treten am deutlichsten im Vergleich mit der Maxwell-Lorentz-Theorie zutage. Wir beginnen daher mit einem Abriß dieser gebräuchlicheren Formulierung der klassischen Elektrodynamik.

§ 1. Maxwell-Lorentz-Elektrodynamik

In ihrer herkömmlichen Formulierung beschreibt klassische Elektrodynamik die Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit geladener Materie (vgl. [3],[4]). Das elektrische Feld $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ und das magnetische Feld $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ sind Funktionen des Ortes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und der Zeit $t \in \mathbb{R}$. Bei gegebener Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\boldsymbol{j}$, welche ebenfalls von $\boldsymbol{x}$ und t abhängen, wird die Dynamik der Felder durch die Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit. In kovarianter Notation lauten die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu, \tag{1.1}$$

mit der Viererstromdichte $j = (c\rho, \boldsymbol{j})$ und dem Feldstärketensor

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

welche jeweils von $x = (ct, \boldsymbol{x})$ abhängen. Es ist zweckmäßig, den Feldstärketensor F gemäß

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{1.2}$$

durch ein Viererpotential A auszudrücken. Die bei der Wahl von A noch bestehende Freiheit schränkt man zumeist dadurch ein, daß A der Eichbedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

unterworfen wird. Die Gleichung (1.1) lautet dann

$$\Box\, A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{1.3}$$

Nun nehmen wir an, daß die Viererstromdichte j durch die Bewegung eines geladenen Punktteilchens hervorgerufen wird. Das Teilchen habe die Masse m und die Ladung e. Seine Trajektorie z im Minkowski-Raum sei durch die Eigenzeit τ parametrisiert. Die Viererstromdichte ist dann (formal) durch

$$j^\nu(x) = ec \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(x - z(\tau)\big)\, \dot{z}^\nu(\tau) d\tau \tag{1.4}$$

gegeben. In diesem Falle läßt sich die Gleichung (1.3) explizit lösen. Eine spezielle Lösung lautet

$$A^\mu_{\mathrm{ret}}(x) = e \frac{\dot{z}^\mu(\tau_{\mathrm{ret}})}{\big(x_\sigma - z_\sigma(\tau_{\mathrm{ret}})\big)\dot{z}^\sigma(\tau_{\mathrm{ret}})}. \tag{1.5}$$

Sie wird als retardiertes Liénard-Wiechert-Potential bezeichnet. Diese Terminologie bringt zum Ausdruck, daß τ_{ret} in der folgenden Weise implizit von x abhängt:

$$z^0(\tau_{\mathrm{ret}}) = ct - \sqrt{\big(x^1 - z^1(\tau_{\mathrm{ret}})\big)^2 + \big(x^2 - z^2(\tau_{\mathrm{ret}})\big)^2 + \big(x^3 - z^3(\tau_{\mathrm{ret}})\big)^2}. \tag{1.6}$$

τ_{ret} entspricht also jenem Zeitpunkt, zu dem die Trajektorie z den Rückwärtslichtkegel von x durchstößt. Dieser Zeitpunkt liegt in der Vergangenheit von t.

Eine andere spezielle Lösung der Gleichung (1.3) bei durch (1.4) gegebenem j ist das avancierte Liénard-Wiechert-Potential

$$A^\mu_{\mathrm{adv}}(x) = e \frac{\dot{z}^\mu(\tau_{\mathrm{adv}})}{\big(x_\sigma - z_\sigma(\tau_{\mathrm{adv}})\big)\dot{z}^\sigma(\tau_{\mathrm{adv}})}. \tag{1.7}$$

Hierbei entspricht τ_{adv} gemäß

$$z^0(\tau_{\mathrm{adv}}) = ct + \sqrt{\big(x^1 - z^1(\tau_{\mathrm{adv}})\big)^2 + \big(x^2 - z^2(\tau_{\mathrm{adv}})\big)^2 + \big(x^3 - z^3(\tau_{\mathrm{adv}})\big)^2} \tag{1.8}$$

jenem Zeitpunkt, zu dem die Trajektorie z den Vorwärtslichtkegel von x durchstößt. Dieser Zeitpunkt liegt in der Zukunft von t.

Die aus A_{ret} und A_{adv} gemäß (1.2) berechneten Feldstärketensoren F_{ret} und F_{adv} sind spezielle Lösungen der Gleichung (1.1) für den durch (1.4) gegebenen Strom j einer Punktladung. Alle weiteren Lösungen gehen aus F_{ret} bzw. F_{adv} durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ hervor. Aus mathematischer Sicht ist keine der beiden Lösungen F_{ret} und F_{adv} in irgendeiner Weise gegenüber der anderen ausgezeichnet. In der Praxis wird jedoch aus Gründen der Kausalität zumeist F_{ret} verwendet.

Der Ausdruck (1.4) für die Viererstromdichte einer einzelnen Punktladung z läßt sich leicht auf mehrere Punktladungen $z_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, N)$ verallgemeinern:

$$j = \sum_{i=1}^{N} j_{(i)}, \qquad j^\nu_{(i)}(x) = e_i c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\big(x - z_{(i)}(\tau_i)\big)\, \dot{z}^\nu_{(i)}(\tau_i) d\tau_i .$$

Die zu j gehörigen Liénard-Wiechert-Potentiale A_{ret} und A_{adv} ergeben sich aus den Potentialen $A_{(i)\text{ret}}$ und $A_{(i)\text{adv}}$ der einzelnen Teilchen,

$$\begin{aligned} A^\mu_{(i)\text{ret}}(x) &= e_i \frac{\dot{z}^\mu_{(i)}(\tau_{i\text{ret}})}{\big(x_\sigma - z_{(i)\sigma}(\tau_{i\text{ret}})\big)\dot{z}^\sigma_{(i)}(\tau_{i\text{ret}})}, \\ A^\mu_{(i)\text{adv}}(x) &= e_i \frac{\dot{z}^\mu_{(i)}(\tau_{i\text{adv}})}{\big(x_\sigma - z_{(i)\sigma}(\tau_{i\text{adv}})\big)\dot{z}^\sigma_{(i)}(\tau_{i\text{adv}})}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

durch lineare Superposition,

$$A_{\text{ret}} = \sum_{i=1}^{N} A_{(i)\text{ret}}, \qquad A_{\text{adv}} = \sum_{i=1}^{N} A_{(i)\text{adv}}.$$

Für die Feldstärketensoren gilt entsprechend

$$F_{\text{ret}} = \sum_{i=1}^{N} F_{(i)\text{ret}}, \qquad F_{\text{adv}} = \sum_{i=1}^{N} F_{(i)\text{adv}}.$$

Man beachte, daß $A_{(i)\text{ret}}(x)$ und $A_{(i)\text{adv}}(x)$ für beliebiges $\tau_i \in \mathbb{R}$ bei $x = z_{(i)}(\tau_i)$ singulär sind. In diesem Falle gilt nämlich $\tau_{i\text{ret}} = \tau_{i\text{adv}} = \tau_i$, und die Nennerausdrücke in (1.9) verschwinden. Dementsprechend sind auch $F_{(i)\text{ret}}$ und $F_{(i)\text{adv}}$ entlang der Weltlinie $z_{(i)}$ bzw. F_{ret} und F_{adv} entlang der Weltlinien sämtlicher N Teilchen singulär.

Bislang haben wir uns auf Situationen beschränkt, bei denen eine Viererstromdichte j vorgegeben war. Anhand der Maxwell-Gleichungen (1.1) ließ sich dann der Feldstärketensor F berechnen. Nun betrachten wir den umgekehrten Fall. Der Feldstärketensor F sei vorgegeben. Die Bewegung einer Punktladung unter dem Einfluß der elektromagnetischen Felder wird dann durch die Lorentz-Kraftgleichung

$$m\ddot{z}^{\mu}(\tau) = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}\big(z(\tau)\big)\,\dot{z}_{\nu}(\tau) \tag{1.10}$$

beschrieben. Zur Berechnung der Lorentz-Kraft auf der rechten Seite dieser Gleichung sind die elektromagnetischen Felder also am jeweiligen Weltpunkt $z(\tau)$ der Punktladung auszuwerten.

Es erscheint nun naheliegend, die Maxwell-Gleichungen (1.1) und die Lorentz-Kraftgleichung (1.10) unmittelbar zu koppeln, mit j gegeben durch (1.4):

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}F^{\mu\nu}(x) &= -4\pi e\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\big(x - z(\tau)\big)\,\dot{z}^{\nu}(\tau)d\tau, \\ m\ddot{z}^{\mu}(\tau) &= \frac{e}{c}F^{\mu\nu}\big(z(\tau)\big)\,\dot{z}_{\nu}(\tau). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Denn offensichtlich ist die bisherige separate Behandlung nur von begrenzter Gültigkeit. Bei der beschleunigten Bewegung im elektromagnetischen Feld sendet ein geladenes Teilchen seinerseits elektromagnetische Strahlung aus. (Eine explizite Darstellung von F_{ret} oder F_{adv} läßt dies erkennen, vgl. [3],[4]). Die ausgesandte Strahlung trägt Energie und Impuls mit sich. Der Ausstrahlungsvorgang wirkt also auf die Teilchenbewegung zurück. Zur korrekten Beschreibung dieser Strahlungsrückwirkung bedarf es einer direkten Kopplung der Maxwell-Gleichungen mit der Lorentz-Kraftgleichung.

In dem gekoppelten Gleichungssystem (1.11) tritt nun aber folgende Schwierigkeit auf: die gemäß der oberen Gleichung von einer Punktladung erzeugten Felder sind am jeweiligen Raum-Zeit-Punkt $z(\tau)$ des Teilchens singulär. Folglich ist die untere Gleichung nicht definiert, denn hier muß F ja gerade bei $z(\tau)$ ausgewertet werden. Es besteht also das Problem einer unendlichen Wechselwirkung der Punktladung mit den von ihr selbst erzeugten elektromagnetischen Feldern. Aufgrund dieser unendlichen Selbstwechselwirkung ist eine Beschreibung geladener Punktteilchen im Rahmen der Maxwell-Lorentz-Elektrodynamik nicht möglich.

Um dem Problem der unendlichen Selbstwechselwirkung beizukommen, hat Dirac folgendes, als Massenrenormierung bezeichnetes Verfahren vorgeschlagen (vgl. [5]). F_{ret} wird gemäß

$$F_{\mathrm{ret}} = \frac{1}{2}\big(F_{\mathrm{ret}} - F_{\mathrm{adv}}\big) + \frac{1}{2}\big(F_{\mathrm{ret}} + F_{\mathrm{adv}}\big)$$

zerlegt und dabei zunächst nicht für eine Punktladung, sondern für eine ausgedehnte, starre Ladungsverteilung vom Radius R berechnet. Hierbei ergibt sich, daß der erste Term im Limes $R \to 0$ auch auf der Weltlinie z des Teilchens beschränkt bleibt und die Gestalt

$$\frac{1}{2}\big(F^{\mu\nu}_{\mathrm{ret}} - F^{\mu\nu}_{\mathrm{adv}}\big) = \frac{2}{3}\frac{e}{c^4}\big(\dddot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} - \dddot{z}^{\nu}\dot{z}^{\mu}\big) \tag{1.12}$$

annimmt, während sich der zweite Term wie

$$\frac{1}{2}\big(F^{\mu\nu}_{\text{ret}} + F^{\mu\nu}_{\text{adv}}\big) = -\frac{1}{2}\frac{e}{c^3 R}\ddot{z}^\mu \dot{z}^\nu$$

verhält. Für die Lorentz-Kraftgleichung bedeutet dies (mit $\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu = c^2$)

$$m\ddot{z}^\mu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\big(\dddot{z}^\mu \dot{z}^\nu - \dddot{z}^\nu \dot{z}^\mu\big)\dot{z}_\nu - \frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2 R}\ddot{z}^\mu.$$

Der Vorfaktor $\delta m := e^2/2c^2 R$ des zweiten Termes hat die physikalische Dimension einer Masse. Er divergiert im Limes $R \to 0$. Nimmt man an, daß m ebenfalls divergiert, daß aber die Summe $m_{\text{exp}} = \delta m + m$ im Limes $R \to 0$ einem endlichen Wert zustrebt, welcher der eigentlich im Experiment beobachteten Masse entspricht (und wiederum mit m bezeichnet wird), so gelangt man zu der Lorentz-Dirac-Gleichung

$$m\ddot{z}^\mu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^5}\big(\dddot{z}^\mu \dot{z}^\nu - \dddot{z}^\nu \dot{z}^\mu\big)\dot{z}_\nu. \tag{1.13}$$

Verallgemeinert auf ein System von N Teilchen lautet sie

$$m_i \ddot{z}^\mu_{(i)} = \frac{2}{3}\frac{e_i^2}{c^5}\big(\dddot{z}^\mu_{(i)} \dot{z}^\nu_{(i)} - \dddot{z}^\nu_{(i)} \dot{z}^\mu_{(i)}\big)\dot{z}_{(i)\nu} + \frac{e_i}{c}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} F^{\mu\nu}_{(j)\text{ret}}\big(z_{(i)}\big)\dot{z}_{(i)\nu}. \tag{1.14}$$

Die Lorentz-Dirac-Gleichungen (1.13) bzw. (1.14) enthalten dritte Zeitableitungen. Sie lassen – selbst im Falle eines einzelnen Teilchens – unphysikalische Lösungen zu, bei denen die Teilchengeschwindigkeit für große Zeiten gegen die Lichtgeschwindigkeit konvergiert. Um diese sogenannten „runaway"-Lösungen auszuschließen, müssen die Gleichungen durch asymptotische Bedingungen der Form

$$\lim_{|\tau_i|\to\infty} \ddot{z}^\mu_{(i)}(\tau_i) = 0 \tag{1.15}$$

ergänzt werden. Zusammengenommen stehen die Bewegungsgleichungen (1.13) bzw. (1.14) und die asymptotischen Bedingungen (1.15) im Einklang mit dem Experiment (vgl. [6]). Insbesondere trägt der Term

$$\frac{2}{3}\frac{e_i^2}{c^5}\big(\dddot{z}^\mu_{(i)} \dot{z}^\nu_{(i)} - \dddot{z}^\nu_{(i)} \dot{z}^\mu_{(i)}\big)\dot{z}_{(i)\nu}$$

auf korrekte Weise dem Effekt der Strahlungsdämpfung des i-ten Teilchens Rechnung.

§ 2. Wheeler-Feynman-Elektrodynamik

Zurückgehend auf frühere Arbeiten von Schwarzschild, Tetrode und Fokker haben Wheeler und Feynman eine relativistische Theorie für die Bewegung geladener Punktteilchen aufgestellt, die keinen Gebrauch vom Begriff des elektromagnetischen Feldes macht (vgl. [1],[2]). Ausgangspunkt dieser Theorie ist das (formale) Wirkungsfunktional

$$\begin{aligned} S = &-\sum_{i=1}^{N} m_i c \int \sqrt{dz^{\nu}_{(i)} dz_{(i)\nu}} \\ &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{e_i e_j}{c} \int\int \delta\Big((z^{\mu}_{(i)} - z^{\mu}_{(j)})(z_{(i)\mu} - z_{(j)\mu})\Big) dz^{\nu}_{(i)} dz_{(j)\nu}, \end{aligned}$$

aus dem sich (ebenso formal) mit Hilfe des Extremalprinzips die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{z}^{\mu}_{(i)} = \frac{e_i}{c} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{2}\Big(F^{\mu\nu}_{(j)\mathrm{ret}}(z_{(i)}) + F^{\mu\nu}_{(j)\mathrm{adv}}(z_{(i)})\Big)\dot{z}_{(i)\nu} \tag{2.1}$$

herleiten lassen. Diese sind die Grundgleichungen der Theorie. Sie beschreiben die Bewegung N geladener Punktteilchen unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Wechselwirkung.

Wir halten die wichtigsten Eigenschaften der Wheeler-Feynman-Bewegungsgleichungen fest. Es handelt sich bei (2.1) um ein relativistisches Kraftgesetz. $F_{(j)\mathrm{ret}}$ und $F_{(j)\mathrm{adv}}$ sind durch die Trajektorie des j-ten Teilchens gegeben. Zur Bestimmung der Kraft auf das i-te Teilchen ($i \neq j$) werden sie bei $z_{(i)}$ ausgewertet. Es liegt also eine reine Teilchenwechselwirkung vor. Elektromagnetische Felder als dynamische Freiheitsgrade sind kein Bestandteil der Theorie. Ein weiteres wichtiges Merkmal der Bewegungsgleichungen ist, daß sich bei der Berechnung der Kraft, die auf eines der Teilchen wirkt, die Summation auf der rechten Seite nur über die jeweils anderen Teilchen erstreckt. Eine Selbstwechselwirkung ist damit explizit ausgeschlossen. Schließlich beachte man, daß $F_{(j)\mathrm{ret}}$ und $F_{(j)\mathrm{adv}}$ vollkommen gleichberechtigt in die Bewegungsgleichungen eingehen.

Nun stellt sich die Frage, inwieweit die Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik im Einklang mit der Empirik stehen. Kann eine Fernwirkungstheorie ohne Selbstwechselwirkung überhaupt dem Effekt der Strahlungsdämpfung gerecht werden?

Um diese Frage zu beantworten, machen wir folgende Beobachtung: falls die als Absorberbedingung bezeichnete Identität

$$\sum_{j=1}^{N}\Big(F_{(j)\mathrm{ret}} - F_{(j)\mathrm{adv}}\Big) = 0 \tag{2.2}$$

gilt, so hat dies

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \frac{1}{2}\Big(F_{(j)\mathrm{ret}} + F_{(j)\mathrm{adv}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(F_{(i)\mathrm{ret}} - F_{(i)\mathrm{adv}}\Big) + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} F_{(j)\mathrm{ret}}$$

zur Konsequenz. Aus den Bewegungsgleichungen (2.1) folgt dann also zusammen mit (1.12)

$$\begin{aligned} m_i \ddot{z}^{\mu}_{(i)} &= \frac{e_i}{c} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \frac{1}{2}\Big(F^{\mu\nu}_{(j)\mathrm{ret}}(z_{(i)}) + F^{\mu\nu}_{(j)\mathrm{adv}}(z_{(i)})\Big)\dot{z}_{(i)\nu} \\ &= \frac{2}{3}\frac{e_i^2}{c^5}\big(\dddot{z}^{\mu}_{(i)}\dot{z}^{\nu}_{(i)} - \dddot{z}^{\nu}_{(i)}\dot{z}^{\mu}_{(i)}\big)\dot{z}_{(i)\nu} + \frac{e_i}{c}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} F^{\mu\nu}_{(j)\mathrm{ret}}(z_{(i)})\dot{z}_{(i)\nu}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

d.h. die Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik gehen in die Lorentz-Dirac-Gleichungen (1.14) über. Damit entfällt zugleich die Notwendigkeit, den Lorentz-Dirac-Gleichungen asymptotische Bedingungen der Form (1.15) aufzuerlegen, um unphysikalische Lösungen auszuschließen. Geht man nämlich davon aus, daß Lösungen der Wheeler-Feynman-Bewegungsgleichungen niemals „runaway"-Verhalten aufweisen – eine Selbstwechselwirkung ist ja ausgeschlossen –, so überträgt sich dies gemäß (2.3) auch auf die Lorentz-Dirac-Gleichungen. Wenn also die Absorberbedingung (2.2) zutrifft, ist die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik empirisch gleichbedeutend mit der massenrenormierten Maxwell-Lorentz-Elektrodynamik. Sie befindet sich dann in Übereinstimmung mit den vertrauten Phänomenen des klassischen Elektromagnetismus, sei es das Feld eines Plattenkondensators, der Hall-Effekt oder die Strahlungsdämpfung einer beschleunigten Punktladung.

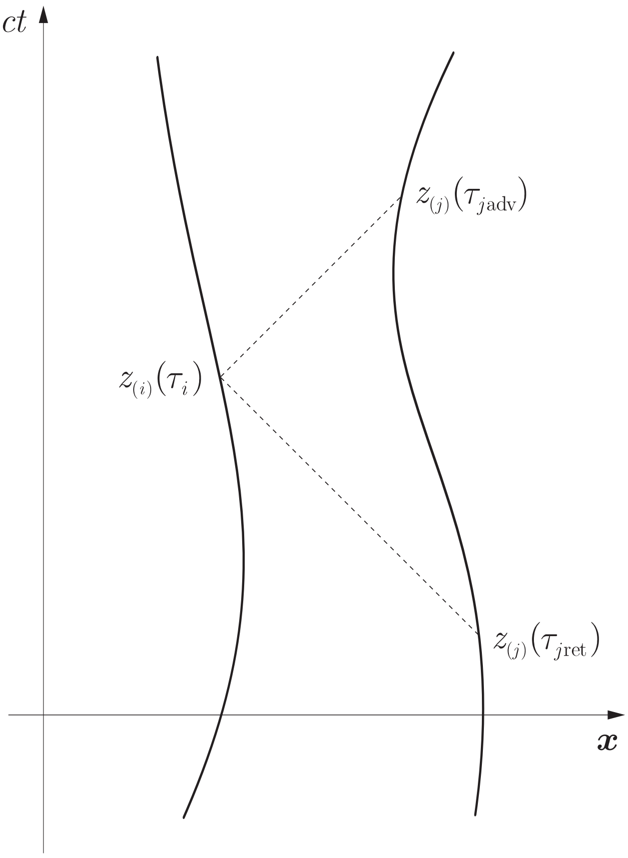
Wheeler und Feynman zeigen, daß die Absorberbedingung tatsächlich gilt, sofern die Gesamtzahl der Teilchen hinreichend groß und ihre räumliche Verteilung hinreichend homogen ist (vgl. [7] hinsichtlich kosmologischer Konsequenzen dieses Sachverhaltes). Damit demonstrieren sie zugleich, daß der irreversible Effekt der Strahlungsdämpfung einen thermodynamischen Ursprung hat. Bei der beschleunigten Bewegung einer einzelnen Punktladung kommt der Gesamtheit aller übrigen Teilchen die Rolle eines Absorbermediums zu. Ist dieses Absorbermedium räumlich genügend ausgedehnt und homogen verteilt, was der Gültigkeit der obigen Absorberbedingung (2.2) entspricht, so ruft die Summe der avancierten Effekte aller Absorberteilchen die Dämpfung des beschleunigten Teilchens hervor. Infolge der Beschleunigung des einzelnen Teilchens wird nämlich jedes der Absorberteilchen zu einem späteren Zeitpunkt in Bewegung versetzt, und diese Bewegung wirkt als avancierter Effekt auf die ursprüngliche Beschleunigung des einzelnen Teilchens zurück. Hingegen hat die Summe der retardierten Effekte keinen Einfluß auf die Beschleunigung des einzelnen Teilchens, wenn sich die Absorberteilchen vor dem Zeitpunkt der Beschleunigung in vollkommen ungeordneter Bewegung oder in Ruhe befinden. Wie in anderen Bereichen der Physik – man denke etwa an die Wärmeleitung – ist also auch in der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik irreversibles Verhalten an zweierlei Gegebenheiten geknüpft. Zum einen muß die Zahl der involvierten Freiheitsgrade, hier also die Anzahl der beteiligten Teilchen, sehr groß sein. Zum anderen bedarf es spezieller Anfangsbedingungen, also etwa der beschleunigten Bewegung eines Teilchens inmitten einer Umgebung anfänglich ruhender Teilchen, die als Absorbermedium fungieren. Man beachte, daß in Systemen niedriger Teilchenzahl, für welche die Absorberbedingung nicht zutrifft, keine Strahlungsdämpfung auftritt (vgl. [8]).

Wir fassen zusammen. Die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik ist eine relativistische Theorie für die Bewegung geladener Punktteilchen. Sie trägt auf der Ebene ihrer Grundgleichungen der vollkommenen Gleichberechtigung retardierter und avancierter Effekte Rechnung und schließt eine Selbstwechselwirkung der Punktladungen explizit aus. Dennoch vermag sie phänomenologisch den irreversiblen Effekt der Strahlungsdämpfung zu beschreiben, wobei sie dessen thermodynamischen Ursprung erkennen läßt. Der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik kommt somit für das Verständnis des Problems der Selbstwechselwirkung in der klassischen Elektrodynamik und des elektrodynamischen Zeitpfeiles eine besondere Bedeutung zu.

Wir kommen nun zur Diskussion der mathematischen Problemstellung, die mit den Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik verbunden ist, und leiten damit zum Hauptteil der vorliegenden Arbeit über.

Bei den Bewegungsgleichungen (2.1) handelt es sich um ein System von Funktionaldifferentialgleichungen mit nacheilenden und vorauseilenden zeitlichen Argumenten. Dies bringt die Definition (1.9) der retardierten und avancierten Liénard-Wiechert-Potentiale mit sich, aus denen sich $F_{(j)\mathrm{ret}}$ und $F_{(j)\mathrm{adv}}$ durch Differentiation ergeben. Um die Beschleunigung $\ddot{z}_{(i)}$ des i-ten Teilchens zum Zeitpunkt $z^0_{(i)}(\tau_i)/c$ zu ermitteln, bedarf es der Kenntnis von $z_{(j)}$, $\dot{z}_{(j)}$ und $\ddot{z}_{(j)}$ zum früheren Zeitpunkt $z^0_{(j)}(\tau_{j\mathrm{ret}})/c$ wie auch zum späteren Zeitpunkt $z^0_{(j)}(\tau_{j\mathrm{adv}})/c$. Dabei sind $\tau_{j\mathrm{ret}}$ und $\tau_{j\mathrm{adv}}$ gemäß (1.6) und (1.8) $\big($mit $x = z_{(i)}(\tau_i)\big)$ implizit durch die Trajektorien $z_{(i)}$ und $z_{(j)}$ gegeben (siehe Figur 1). Infolge dieser nichtinstantanen Struktur der Gleichungen stehen Begriffe wie „Anfangswert" und „lokale Lösung" nicht im herkömmlichen Sinne zur Verfügung.

Es stellt sich nun die Frage, wie überhaupt derartige Gleichungen zu analysieren sind. In der mathematischen Literatur gab es bislang keine systematische Untersuchung der Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik. Zwar gibt es gewisse Aussagen über vereinfachte Gleichungen ([9]), numerische Approximationen ([10]) sowie zahlreiche Vermutungen zu Fragen der Existenz



Figur 1
Relativistische Fernwechselwirkung.

und Eindeutigkeit von Lösungen ([2],[11],[12]). Rigorose Ergebnisse, insbesondere eine Existenztheorie, standen bisher jedoch noch vollkommen aus ([13]). In der vorliegenden Arbeit nun untersuchen wir die spezielle Situation zweier sich gegenseitig abstoßender Punktladungen, deren Bewegung in einer Raumdimension verläuft, d.h. entlang einer Geraden im $\mathbb{R}^3$. Wir beweisen einen Existenzsatz für die zugehörigen Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik. Zudem zeigen wir, wie sich sämtliche Lösungen dieser Gleichungen anhand bestimmter Daten, die mit dem asymptotischen Verhalten der Lösungen zu großen Zeiten in Zusammenhang stehen, klassifizieren lassen. Mehr als fünfzig Jahre nach der Arbeit von Wheeler und Feynman handelt es sich hierbei um die ersten rigorosen mathematischen Resultate zu den Bewegungsgleichungen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik.

Gleichwohl sind die erzielten Ergebnisse erst als Beginn einer umfassenderen Existenztheorie für die Wheeler-Feynman-Elektrodynamik anzusehen. So bleibt die Frage offen, ob die Daten, anhand derer wir alle Lösungen der untersuchten Gleichungen klassifizieren, die Lösungen bereits eindeutig festlegen. Außerdem ist es erstrebenswert, die Existenztheorie auch auf anziehende Teilchen, auf höhere Raumdimensionen und auf mehr als zwei Teilchen auszubauen. Dies sollte Gegenstand zukünftiger Forschung sein.

Kapitel II

Zwei abstoßende Punktladungen in einer Raumdimension

§ 3. Die Bewegungsgleichungen

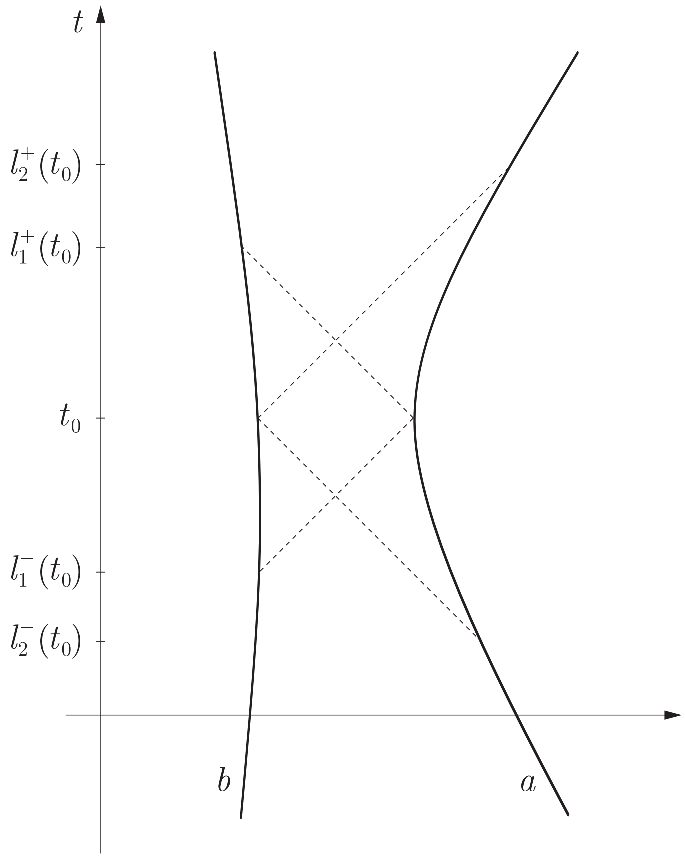
Die Bewegung zweier sich abstoßender Punktladungen in einer Raumdimension wird im Rahmen der Wheeler-Feynman-Elektrodynamik durch das System von Differentialgleichungen

$$\ddot{a}(t) = \frac{1}{2}\frac{e_1e_2}{m_1}\Big(1-\dot{a}(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)} \frac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|^3} + \frac{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)} \frac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|^3} \right]$$

$$\ddot{b}(t) = \frac{1}{2}\frac{e_2e_1}{m_2}\Big(1-\dot{b}(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1+\dfrac{b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)}{\big|b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)\big|}\dot{a}\big(l_2^-(t)\big)}{1-\dfrac{b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)}{\big|b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)\big|}\dot{a}\big(l_2^-(t)\big)} \frac{b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)}{\big|b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)\big|^3} + \frac{1-\dfrac{b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)}{\big|b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)\big|}\dot{a}\big(l_2^+(t)\big)}{1+\dfrac{b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)}{\big|b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)\big|}\dot{a}\big(l_2^+(t)\big)} \frac{b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)}{\big|b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)\big|^3} \right] \tag{WF$_0$}$$

beschrieben, zusammen mit der impliziten Vorschrift

$$\begin{aligned} l_1^-(t) &= t - \big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|\,, \qquad & l_1^+(t) &= t + \big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|\,, \\ l_2^-(t) &= t - \big|b(t)-a\big(l_2^-(t)\big)\big|\,, \qquad & l_2^+(t) &= t + \big|b(t)-a\big(l_2^+(t)\big)\big|\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$



Figur 2
Zur Definition der Lichtkegelfunktionen.

Hierbei bezeichnen a bzw. b die Ortskoordinaten der beiden Teilchen als Funktionen der Zeit $t \in \mathbb{R}$. Wir haben physikalische Einheiten gewählt, in denen der Lichtgeschwindigkeit (welche als Konstante in die Bewegungsgleichungen eingeht) der Wert Eins zukommt. Die Konstanten $m_1 > 0$ und $m_2 > 0$ bzw. e_1 und e_2 stehen für die Massen bzw. Ladungen der beiden Teilchen. Daß die Teilchen sich gegenseitig abstoßen, entspricht der Bedingung $e_1 e_2 > 0$. Wir definieren der Kürze halber $\kappa_1 := e_1 e_2 / m_1$, $\kappa_2 := e_2 e_1 / m_2$ und verlangen also $\kappa_1, \kappa_2 > 0$. Ist ein Paar (a, b) von Teilchenbahnen gegeben, so bezeichnen wir Funktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+, welche für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Vorschrift (3.1) genügen, als Lichtkegelfunktionen des Paares (a, b).

Eine Herleitung der Bewegungsgleichungen (WF_0) aus dem kovarianten Kraftgesetz (2.1) findet sich im Anhang.

Bei den Bewegungsgleichungen (WF_0) handelt es sich um ein System von Differentialgleichungen mit nacheilenden und vorauseilenden zeitlichen Argumenten. Die Beschleunigung $\ddot{a}(t_0)$ des Teilchens a zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ hängt vom Ort und der Geschwindigkeit des Teilchens b sowohl zum früheren Zeitpunkt $l_1^-(t_0)$ als auch zum späteren Zeitpunkt $l_1^+(t_0)$ ab. Ebenso bedarf es zur Berechnung von $\ddot{b}(t_0)$ der Kenntnis des Ortes und der Geschwindigkeit von a zu den Zeitpunkten $l_2^-(t_0) < t_0$ sowie $l_2^+(t_0) > t_0$. Dabei sind die retardierten bzw. avancierten Zeitpunkte $l_1^-(t_0)$, $l_1^+(t_0)$, $l_2^-(t_0)$ und $l_2^+(t_0)$ nicht explizit gegeben, sondern sie sind durch die Vorschrift (3.1) – in Abhängigkeit von den Funktionen a und b – implizit definiert (siehe Figur 2). Diese nichtinstantane Struktur der Bewegungsgleichungen bringt es mit sich, daß so grundlegende Begriffe aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen wie „Anfangswert“ oder „lokale Lösung“ keine unmittelbare Entsprechung haben.

Unsere Untersuchung gilt dem Problem der Existenz von Lösungen des obigen Systems von Differentialgleichungen. Wir beweisen, daß die Gleichungen (WF_0) zusammen mit der Vorschrift (3.1) in der Tat Lösungen besitzen. Dabei zeigen wir auch, daß sich sämtliche Lösungen von (WF_0) anhand bestimmter Daten, nämlich vier reeller Zahlen, klassifizieren lassen. Im Gegensatz zu den Anfangsdaten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche einem festen $t_0 \in \mathbb{R}$ zugehörig sind, stehen diese Daten mit dem asymptotischen Verhalten der Lösungen für $t \to -\infty$ bzw. $t \to \infty$ in Zusammenhang.

§ 4. Der Lösungsbegriff

Wir beginnen unsere Untersuchung damit, einen geeigneten Lösungsbegriff für die Bewegungsgleichungen (WF_0) festzulegen. Wegen der ungewöhnlichen Struktur dieser Gleichungen – die „Kraftterme“ auf der rechten Seite in (WF_0) weisen nacheilende und vorauseilende zeitliche Argumente auf, welche durch (3.1) implizit definiert sind – liegt es nicht unmittelbar auf der Hand, wann die rechte Seite in (WF_0) überhaupt wohldefiniert ist. Daher richten wir unser Augenmerk zunächst auf folgende Frage: Unter welchen Voraussetzungen an die Funktionen a und b sind durch die Vorschrift (3.1) eindeutig Funktionen l_1^-,l_1^+,l_2^- und l_2^+ auf $\mathbb{R}$ erklärt und sind überdies alle Nennerausdrücke in (WF_0) für jedes $t \in \mathbb{R}$ von Null verschieden? Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir die Vorschrift (3.1) näher untersuchen. Der folgende Satz verschafft uns Klarheit darüber, wann ein Paar (a, b) stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen (3.1) durch Funktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ auf $\mathbb{R}$ gestattet.

4.1 Satz. *Für ein Funktionenpaar $\phi = (a, b) \in C(\mathbb{R})^2$ mit voneinander verschiedenen Funktionen a und b sind folgende zwei Eigenschaften äquivalent:*

(i) *Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$, welche die Gleichungen (3.1) erfüllen.*

(ii) *Es gilt*

$$\frac{|a(t') - a(t)|}{t' - t} < 1, \quad \frac{|b(t') - b(t)|}{t' - t} < 1 \quad \textit{für } t, t' \in \mathbb{R},\ t' > t \tag{4.1}$$

sowie

$$\lim_{t\to\pm\infty} t - a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t - b(t),$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} t + a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t + b(t), \tag{4.2}$$

wobei die Grenzwerte im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existieren.

Sind die Funktionen a und b dagegen identisch auf $\mathbb{R}$, so ist (i) *äquivalent zu*

$$\frac{|a(t') - a(t)|}{t' - t} = \frac{|b(t') - b(t)|}{t' - t} \neq 1 \quad \textit{für } t, t' \in \mathbb{R},\, t' > t. \tag{4.3}$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den trivialen Fall, daß a und b identisch sind. Gilt $a(t) - b(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so werden die Gleichungen (3.1) offensichtlich durch

$$l_1^-(t) = l_1^+(t) = l_2^-(t) = l_2^+(t) = t \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{4.4}$$

erfüllt. Die Eindeutigkeit dieser Lösung und damit die Gültigkeit der Eigenschaft (i) ist genau dann gewährleistet, wenn (4.3) gilt. Denn ist (4.3) verletzt, gilt also $|a(t_2) - a(t_1)| = |b(t_2) - b(t_1)| = t_2 - t_1$ für zwei Zahlen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_2 > t_1$, so werden die Gleichungen (3.1) nicht nur durch (4.4), sondern für $t = t_1$ auch durch

$$l_1^+(t_1) = l_2^+(t_1) = t_2, \quad l_1^-(t_1) = l_2^-(t_1) = t_1$$

und für $t = t_2$ auch durch

$$l_1^-(t_2) = l_2^-(t_2) = t_1, \quad l_1^+(t_2) = l_2^+(t_2) = t_2$$

gelöst. Existiert umgekehrt für ein $t^* \in \mathbb{R}$ noch eine weitere, von (4.4) verschiedene Lösung der Gleichungen (3.1), so führt dies auf einen Widerspruch zu (4.3): gilt etwa $l_1^-(t^*) \neq t^*$, so folgt

$$\frac{\left|a(t^*) - a\big(l_1^-(t^*)\big)\right|}{t^* - l_1^-(t^*)} = \frac{\left|a(t^*) - b\big(l_1^-(t^*)\big)\right|}{t^* - l_1^-(t^*)} = 1,$$

d.h. (4.3) ist verletzt, und genauso widerspricht es (4.3), wenn $l_1^+(t^*)$, $l_2^-(t^*)$ oder $l_2^+(t^*)$ von t^* verschieden sind.

Die Aussage des Satzes für den Fall, daß a und b identisch sind, ist damit bewiesen. Nun seien a und b als voneinander verschieden angenommen.

(i)⇒(ii): Wir nehmen an, daß es zwei Zahlen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_2 > t_1$ und

$$\frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1} \geq 1 \tag{4.5}$$

gibt, und wollen diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Hierfür zeigen wir zunächst, daß (4.5) die Existenz zweier Zahlen $t_1^*, t_2^* \in \mathbb{R}$ mit $t_2^* > t_1^*$ und

$$\frac{a(t_2^*) - a(t_1^*)}{t_2^* - t_1^*} = 1 \tag{4.6}$$

nach sich zieht. Nach Voraussetzung gibt es ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit $a(\tau) \neq b(\tau)$. Aus (3.1) folgt also $l_2^-(\tau) < \tau$ und $l_2^+(\tau) > \tau$. Würde nun

$$\frac{a(t') - a(t)}{t' - t} \geq 1 \qquad \text{für alle } t, t' \in \mathbb{R},\ t' > t \tag{4.7}$$

gelten, so hätte dies gemäß (3.1) im Falle $a(\tau) < b(\tau)$

$$\begin{aligned} l_2^-(\tau) &= \tau - \left|b(\tau) - a(\tau) + a(\tau) - a\big(l_2^-(\tau)\big)\right| \\ &\leq \tau - b(\tau) + a(\tau) - \tau + l_2^-(\tau), \\ &< l_2^-(\tau), \end{aligned}$$

und im Falle $a(\tau) > b(\tau)$

$$\begin{aligned} l_2^+(\tau) &= \tau + \left|a\big(l_2^+(\tau)\big) - a(\tau) + a(\tau) - b(\tau)\right| \\ &\geq \tau + l_2^+(\tau) - \tau + a(\tau) - b(\tau) \\ &> l_2^+(\tau) \end{aligned}$$

zur Konsequenz. Es muß daher Zahlen $\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2 \in \mathbb{R}$ mit $\widetilde{t}_2 > \widetilde{t}_1$ und

$$\frac{a(\widetilde{t}_2) - a(\widetilde{t}_1)}{\widetilde{t}_2 - \widetilde{t}_1} < 1 \tag{4.8}$$

geben. Für

$$f(\lambda) := a\big(\lambda t_2 + (1-\lambda)\widetilde{t}_2\big) - a\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)\widetilde{t}_1\big) - \lambda(t_2 - t_1) - (1-\lambda)(\widetilde{t}_2 - \widetilde{t}_1)$$

mit $\lambda \in [0,1]$ gilt gemäß (4.8) $f(0) < 0$ und gemäß (4.5) $f(1) \geq 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $\lambda^* \in]0,1]$ mit $f(\lambda^*) = 0$. Für $t_1^* := \lambda^* t_1 + (1-\lambda^*)\widetilde{t}_1$ und $t_2^* := \lambda^* t_2 + (1-\lambda^*)\widetilde{t}_2$ gilt also $t_2^* > t_1^*$ sowie $a(t_2^*) - a(t_1^*) - (t_2^* - t_1^*) = 0$. Damit ist (4.6) gezeigt. Nun betrachten wir

$$g(t) := a(t_1^*) + t - t_1^* = a(t_2^*) + t - t_2^* \quad (t \in \mathbb{R})$$

und zeigen, daß ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $b(\xi) = g(\xi)$ und $l_2^-(\xi) = t_1^*$, $l_2^+(\xi) = t_2^*$ existiert. Würde $g(t) > b(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten, so hätte dies

$$\begin{aligned} l_1^-(t_1^*) &= t_1^* - \left|a(t_1^*) - g\big(l_1^-(t_1^*)\big) + g\big(l_1^-(t_1^*)\big) - b\big(l_1^-(t_1^*)\big)\right| \\ &= t_1^* - \left|t_1^* - l_1^-(t_1^*) + g\big(l_1^-(t_1^*)\big) - b\big(l_1^-(t_1^*)\big)\right| \\ &= l_1^-(t_1^*) - g\big(l_1^-(t_1^*)\big) + b\big(l_1^-(t_1^*)\big) \\ &< l_1^-(t_1^*) \end{aligned}$$

zur Folge, und analog würde aus $g < b$ in $\mathbb{R}$ der Widerspruch

$$\begin{aligned} l_1^+(t_2^*) &= t_2^* + \big|a(t_2^*) - g\big(l_1^+(t_2^*)\big) + g\big(l_1^+(t_2^*)\big) - b\big(l_1^+(t_2^*)\big)\big| \\ &= t_2^* + \big|t_2^* - l_1^+(t_2^*) + g\big(l_1^+(t_2^*)\big) - b\big(l_1^+(t_2^*)\big)\big| \\ &= l_1^+(t_2^*) - g\big(l_1^+(t_2^*)\big) + b\big(l_1^+(t_2^*)\big) \\ &> l_1^+(t_2^*) \end{aligned}$$

folgen. Wegen der Stetigkeit von b und g gibt es daher ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $b(\xi) = g(\xi)$. Es gilt $t_1^* < \xi < t_2^*$, denn wegen $t_2^* > t_1^*$ und

$$|t_i^* - \xi| = |a(t_i^*) - g(\xi)| = |a(t_i^*) - b(\xi)| \quad (i = 1, 2) \tag{4.9}$$

stünde $\xi < t_1^*$ bzw. $\xi > t_2^*$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit von $l_2^+(\xi)$ bzw. $l_2^-(\xi)$. Aus $t_1^* < \xi < t_2^*$ und (4.9) folgt weiterhin $l_2^-(\xi) = t_1^*$ und $l_2^+(\xi) = t_2^*$. Dies bedeutet, daß für ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $|\omega - \xi| = |a(\omega) - b(\xi)|$ entweder $\omega = t_1^*$ oder $\omega = t_2^*$ gelten muß. Für

$$h(t) := t - \xi + a(t) - b(\xi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

gilt jedoch

$$h(t_i^*) = t_i^* - \xi + a(t_i^*) - b(\xi) = t_i^* - \xi + a(t_i^*) - g(\xi) = 2(t_i^* - \xi) \quad (i = 1, 2),$$

also $h(t_1^*) < 0$ und $h(t_2^*) > 0$, so daß wegen der Stetigkeit von h und dem Zwischenwertsatz ein $\omega \in]t_1^*, t_2^*[$ mit $h(\omega) = 0$ bzw. $|\omega - \xi| = |a(\omega) - b(\xi)|$ existiert. Damit haben wir schließlich einen Widerspruch zur Annahme (4.5) gewonnen und bewiesen, daß

$$\frac{a(t') - a(t)}{t' - t} < 1 \qquad \text{für alle } t, t' \in \mathbb{R},\ t' > t$$

gilt. Die verbleibenden Ungleichungen in (4.1) beweist man völlig analog.

Nun kommen wir zum Beweis der Grenzwertaussagen (4.2). Stellvertretend beweisen wir

$$\lim_{t\to\infty} t - a(t) = \lim_{t\to\infty} t - b(t). \tag{4.10}$$

Die Gültigkeit der übrigen drei Gleichungen beweist man analog. Wegen (4.1) sind die Funktionen $t \mapsto t - a(t)$ und $t \mapsto t - b(t)$ in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend: für $t, t' \in \mathbb{R}$ mit $t' > t$ gilt

$$\big(t' - a(t')\big) - \big(t - a(t)\big) = t' - t - \big(a(t') - a(t)\big) > 0,$$

und die Ungleichung bleibt richtig, wenn wir a durch b ersetzen. Somit existieren die Grenzwerte in (4.10) im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne. Nehmen wir nun an, daß die Grenzwerte verschieden sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\alpha := \lim_{t\to\infty} t - a(t) < \lim_{t\to\infty} t - b(t). \tag{4.11}$$

Dann gilt

$$t - a(t) < \alpha \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

und es existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $t_0 - b(t_0) > \alpha$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} l_2^+(t_0) - a\big(l_2^+(t_0)\big) &= t_0 + \big|b(t_0) - a\big(l_2^+(t_0)\big)\big| - a\big(l_2^+(t_0)\big) \\ &> \alpha + b(t_0) - a\big(l_2^+(t_0)\big) + \big|b(t_0) - a\big(l_2^+(t_0)\big)\big| \\ &\geq \alpha, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (4.12). Folglich ist die Annahme (4.11) widerlegt und damit (4.10) bewiesen.

(ii)$\Rightarrow$(i): Wir betrachten die auf $\mathbb{R}^2$ gemäß

$$H(t,x) := t - |a(t) - b(x)| - x \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

definierte stetige Funktion H. Der Gleichung

$$l_1^-(t) = t - \big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big| \tag{4.13}$$

zu festem $t \in \mathbb{R}$ genügt eine Zahl $l_1^-(t)$ offensichtlich genau dann, wenn sie Nullstelle der auf $\mathbb{R}$ erklärten stetigen Funktion $H_t := H(t,\cdot)$ ist. Wir zeigen, daß H_t genau eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt. Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $x' > x$ gilt wegen (4.1)

$$\begin{aligned} H_t(x') - H_t(x) &= -(x'-x) - |a(t) - b(x')| + |a(t) - b(x)| \\ &\leq -(x'-x) + |b(x') - b(x)| \qquad (4.14) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also ist H_t streng monoton fallend und besitzt höchstens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Weiterhin gilt $H_t(t) = -|a(t) - b(t)| \leq 0$. Daß H_t auch mindestens eine Nullstelle besitzt, wird demnach durch den Zwischenwertsatz gewährleistet, sofern

$$\lim_{x\to-\infty} H_t(x) > 0$$

gilt. Wegen der Monotonie von H_t existiert der Grenzwert (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne). Nehmen wir nun an, daß

$$\lim_{x\to-\infty} H_t(x) = \lim_{x\to-\infty} t - |a(t) - b(x)| - x \leq 0 \tag{4.15}$$

gilt. Dann muß $|b(x)|$ für $x \to -\infty$ gegen ∞ streben, also entweder

$$\lim_{x\to-\infty} b(x) = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to-\infty} b(x) = -\infty$$

gelten. Im ersten Fall folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} t - |a(t) - b(x)| - x &= t + a(t) - \lim_{x\to-\infty} \big(x + b(x)\big)\\ &= t + a(t) - \lim_{x\to-\infty} \big(x + a(x)\big)\\ &> 0,\end{aligned}$$

und im zweiten Falle

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} t - |a(t) - b(x)| - x &= t - a(t) - \lim_{x\to-\infty} \big(x - b(x)\big)\\ &= t - a(t) - \lim_{x\to-\infty} \big(x - a(x)\big)\\ &> 0,\end{aligned}$$

wobei wir jeweils die Voraussetzung (4.2) sowie das streng monotone Anwachsen von $t \mapsto t \pm a(t)$ ausgenutzt haben. Es besteht also in beiden Fällen ein Widerspruch zur Annahme (4.15). Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ hat somit die Funktion $H_t = H(t,\cdot)\colon x \mapsto H(t,x)$ genau eine Nullstelle in $\mathbb{R}$, und es existiert dementsprechend zu jedem $t \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $l_1^-(t) = H(t,\cdot)^{-1}(0)$ der Gleichung (4.13). Hinsichtlich $l_1^-(t)$ ist damit (i) bewiesen. Die entsprechenden Aussagen für $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$ beweist man analog. □

Die Lichtkegelfunktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ eines Funktionenpaares (a,b) haben, sofern sie eindeutig existieren, bestimmte Eigenschaften, von denen der folgende Satz die wichtigsten bereitstellt.

4.2 Satz. *Es sei $\phi = (a,b) \in C(\mathbb{R})^2$ ein Funktionenpaar derart, daß zu jedem $t \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Zahlen $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$ existieren, welche die Gleichungen* (3.1) *erfüllen. Dann haben die auf $\mathbb{R}$ erklärten Funktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ folgende Eigenschaften:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$t = l_1^-\big(l_2^+(t)\big) = l_2^+\big(l_1^-(t)\big) = l_1^+\big(l_2^-(t)\big) = l_2^-\big(l_1^+(t)\big),$$

d.h. l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ bilden $\mathbb{R}$ bijektiv auf sich ab.

(ii) *l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ sind stetig.*

(iii) *l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ sind streng monoton wachsend.*

(iv) *Gilt* $a(t) - b(t) \neq 0$ *für ein* $t \in \mathbb{R}$, *so sind*

$$a(t) - b\big(l_1^-(t)\big),\ a(t) - b\big(l_1^+(t)\big),\ a\big(l_2^-(t)\big) - b(t) \quad \textit{und} \quad a\big(l_2^+(t)\big) - b(t)$$

ebenfalls von Null verschieden und haben dasselbe Vorzeichen wie $a(t)-b(t)$.

(v) *Gilt* $a, b \in C^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$, *sowie* $a(t) - b(t) \neq 0$ *und* $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$, *so sind* l_1^-, l_1^+, l_2^- *und* l_2^+ k*-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Wir beweisen die Aussagen des Satzes nur für l_1^-; die Beweise für l_1^+, l_2^- und l_2^+ führt man entsprechend.

(i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$l_1^-\big(l_2^+(t)\big) = l_2^+(t) - \Big|a\big(l_2^+(t)\big) - b\Big(l_1^-\big(l_2^+(t)\big)\Big)\Big|$$

sowie

$$t = l_2^+(t) - \Big|a\big(l_2^+(t)\big) - b(t)\Big|.$$

Wegen der Eindeutigkeit von $l_1^-(s)$ als Lösung der Gleichung

$$l_1^-(s) = s - \big|a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\big| \quad (s \in \mathbb{R})$$

folgt mit $s = l_2^+(t)$ die Behauptung $l_1^-\big(l_2^+(t)\big) = t$. Umgekehrt gilt

$$l_2^+\big(l_1^-(t)\big) = l_1^-(t) + \Big|b\big(l_1^-(t)\big) - a\Big(l_2^+\big(l_1^-(t)\big)\Big)\Big|$$

sowie

$$t = l_1^-(t) + \Big|b\big(l_1^-(t)\big) - a(t)\Big|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und wegen der Eindeutigkeit von $l_2^+(s)$ als Lösung der Gleichung

$$l_2^+(s) = s + \big|b(s) - a\big(l_2^+(s)\big)\big| \quad (s \in \mathbb{R})$$

folgt mit $s = l_1^-(t)$ die Behauptung $l_2^+\big(l_1^-(t)\big) = t$. l_1^- ist surjektiv, denn für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt $l_1^-\big(l_2^+(x)\big) = x$, und l_1^- ist injektiv, denn aus $l_1^-(t_1) = l_1^-(t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, folgt $t_1 = l_2^+\big(l_1^-(t_1)\big) = l_2^+\big(l_1^-(t_2)\big) = t_2$. Also ist l_1^- eine Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(ii) Sind a und b identisch, so gilt $l_1^-(t) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. l_1^- ist stetig. Nehmen wir nun an, daß a und b verschieden sind. Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir beweisen die Stetigkeit von l_1^- im Punkte t_0. Hierzu betrachten wir wieder die auf $\mathbb{R}^2$ gemäß

$$H(t, x) := t - |a(t) - b(x)| - x \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

erklärte stetige Funktion H. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $H(t, x) = 0$ gleichbedeutend mit $x = l_1^-(t)$. Insbesondere gilt $H\big(t_0, l_1^-(t_0)\big) = 0$. Nach Satz 2.1 gilt (4.1), und daher besteht $\big($mit $H_t := H(t,\cdot)\big)$ die Abschätzung (4.14), d.h. für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $x \mapsto H(t,x)$ streng monoton fallend in $\mathbb{R}$. Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gilt

$$H\big(t_0, l_1^-(t_0) - \varepsilon\big) > 0 \quad \text{und} \quad H\big(t_0, l_1^-(t_0) + \varepsilon\big) < 0.$$

Wegen der Stetigkeit von H gibt es eine Umgebung U von t_0 mit

$$H\big(t, l_1^-(t_0) - \varepsilon\big) > 0 \quad \text{und} \quad H\big(t, l_1^-(t_0) + \varepsilon\big) < 0 \quad \text{für alle } t \in U.$$

Hieraus folgt $l_1^-(t_0) - \varepsilon < l_1^-(t) < l_1^-(t_0) + \varepsilon$ bzw. $|l_1^-(t) - l_1^-(t_0)| < \varepsilon$ für $t \in U$. Also ist l_1^- stetig im Punkte t_0.

(iii) Als stetige Bijektion ist $l_1^-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend. Aus

$$\lim_{t\to-\infty} l_1^-(t) = \lim_{t\to-\infty} t - \big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big| = -\infty$$

folgt, daß l_1^- streng monoton wächst.

(iv) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a(t) > b(t)$. Nach Satz 2.1 gilt (4.1), und wegen $l_1^-(t) \le t$ folgt daraus $b(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \ge -\big(t - l_1^-(t)\big)$. Würde nun $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \le 0$ gelten, so hätte dies den Widerspruch

$$l_1^-(t) = t + a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \ge t + a(t) - b(t) - \big(t - l_1^-(t)\big) > l_1^-(t)$$

zur Folge. Also gilt $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) > 0$.

(v) Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir beweisen, daß es eine Umgebung U von t_0 mit $l_1^-\big|_U \in C^k(U)$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a(t) - b(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach (iv) ist dann auch $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) > 0$ und $a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die auf $\mathbb{R}^2$ gemäß

$$\widetilde{H}(t,x) := t - a(t) + b(x) - x \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion $\widetilde{H}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\widetilde{H}(t,x) = 0$ äquivalent zu $x = l_1^-(t)$, denn es gilt offensichtlich $\widetilde{H}\big(t, l_1^-(t)\big) = 0$, und aus $\widetilde{H}(t,x) = 0$ folgt umgekehrt $|t - x| = |a(t) - b(x)|$, also entweder $x = l_1^-(t)$ oder $x = l_1^+(t)$; im zweiten Falle aber würde wegen $a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) > 0$ und $l_1^+(t) \ge t$ der Widerspruch

$$0 = H\big(t, l_1^+(t)\big) = t - a(t) + b\big(l_1^+(t)\big) - l_1^+(t) < 0$$

folgen, d.h. es muß $x = l_1^-(t)$ sein. Somit besteht der Zusammenhang

$$\operatorname{graph} l_1^- = \widetilde{H}^{-1}(\{0\}), \tag{4.16}$$

und insbesondere ist $\widetilde{H}\big(t_0, l_1^-(t_0)\big) = 0$. Aufgrund der vorausgesetzten Eigenschaften von a und b gilt weiterhin $\widetilde{H} \in C^k(\mathbb{R}^2)$ und $\partial_x \widetilde{H} < 0$. Dem Satz über implizite Funktionen (vgl. [14]) zufolge gibt es also Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ von t_0 bzw. $l_1^-(t_0)$ und eine Funktion $g\colon U \to V$ mit

$$\operatorname{graph} g = \widetilde{H}^{-1}(\{0\}) \cap (U \times V)$$

sowie $g \in C^k(U)$. Wegen (4.16) muß $g = l_1^-\big|_U$ und damit $l_1^-\big|_U \in C^k(U)$ gelten. Da also zu jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von t_0 mit $l_1^-\big|_U \in C^k(U)$ existiert, erhalten wir $l_1^- \in C^k(\mathbb{R})$. □

Mit Hilfe der beiden vorangegangenen Sätze können wir nun die eingangs gestellte Frage beantworten, unter welchen Voraussetzungen an die Funktionen a und b die rechte Seite in (WF_0) für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

4.3 Satz. *Für ein Funktionenpaar $\phi = (a, b) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ sind folgende zwei Eigenschaften äquivalent:*

(i) $\big($*Wohldefiniertheit der rechten Seite in* (WF_0) *für jedes* $t \in \mathbb{R}\big)$ *Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$, welche die Gleichungen* (3.1) *erfüllen. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt weiter*

$$\begin{aligned} a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \neq 0, \quad a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) \neq 0, \\ b(t) - a\big(l_2^-(t)\big) \neq 0, \quad b(t) - a\big(l_2^+(t)\big) \neq 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{a(t) - b(l_1^-(t))}{\big|a(t) - b(l_1^-(t))\big|}\dot{b}\big(l_1^-(t)\big) \neq 1, \quad \frac{a(t) - b(l_1^+(t))}{\big|a(t) - b(l_1^+(t))\big|}\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) \neq -1, \\ \frac{b(t) - a(l_2^-(t))}{\big|b(t) - a(l_2^-(t))\big|}\dot{a}\big(l_2^-(t)\big) \neq 1, \quad \frac{b(t) - a(l_2^+(t))}{\big|b(t) - a(l_2^+(t))\big|}\dot{a}\big(l_2^+(t)\big) \neq -1. \end{aligned} \tag{4.18}$$

(ii) *Es gilt $a(t) - b(t) \neq 0$ und $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\pm\infty} t - a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t - b(t), \\ \lim_{t\to\pm\infty} t + a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t + b(t), \end{aligned} \tag{4.19}$$

wobei die Grenzwerte im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existieren.

Beweis. (i)⇒(ii): Würde $a(t) - b(t) = 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gelten, so hätte dies $l_1^-(t) = t$ und damit $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) = 0$ zur Folge, im Widerspruch zu der Voraussetzung (4.17). Wegen der Stetigkeit von a und b gilt also entweder $a(t) - b(t) > 0$ oder

$a(t) - b(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a - b > 0$ in $\mathbb{R}$. Aus Satz 2.2 (iv) und der Voraussetzung (4.18) folgt dann

$$\dot{b}\big(l_1^-(t)\big) \neq 1, \quad \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) \neq -1, \quad \dot{a}\big(l_2^-(t)\big) \neq -1 \quad \text{und} \quad \dot{a}\big(l_2^+(t)\big) \neq 1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Da l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ nach Satz 2.2 (i) surjektiv sind, folgt $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \neq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt nach Satz 2.1 die Eigenschaft (4.1), aus welcher zusammen mit $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \neq 1$ schließlich $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt. Die Gültigkeit von (4.19) wird unmittelbar durch Satz 2.1 gewährleistet.

(ii)⇒(i): Wegen $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt (4.1). Nach Satz 2.1 folgt hieraus zusammen mit (4.19) die Existenz und Eindeutigkeit von l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+. Weiter hat $a(t) - b(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nach Satz 2.2 (iv) die Eigenschaft (4.17) zur Folge. Aus $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt schließlich die Eigenschaft (4.18). □

Wir kommen nun zur Definition unseres Lösungsbegriffes für die Bewegungsgleichungen (WF_0). Der vorausgegangene Satz verschafft uns ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Wohldefiniertheit der rechten Seite in (WF_0). Es liegt nahe, den Lösungsbegriff an dieses Kriterium zu knüpfen.

4.4 Definition. *Ein Funktionenpaar $\phi = (a, b) \in \big(C^2(\mathbb{R})\big)^2$ heißt Lösung der Bewegungsgleichungen* (WF_0)*, wenn folgende Aussagen zutreffen:*

(i) *Es gilt $a(t) - b(t) \neq 0$ und $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\pm\infty} t - a(t) &= \lim_{t\to\pm\infty} t - b(t), \\ \lim_{t\to\pm\infty} t + a(t) &= \lim_{t\to\pm\infty} t + b(t), \end{aligned} \tag{4.20}$$

wobei die Grenzwerte im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existieren.

(ii) *Die Gleichungen* (WF_0) *sind für jedes $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.*

4.5 Bemerkungen. 1. Die Definition verlangt von einer Lösung der Bewegungsgleichungen (WF_0) zweierlei: zunächst die Wohldefiniertheit aller in (WF_0) auftretenden Ausdrücke für jedes $t \in \mathbb{R}$, insbesondere also der Funktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+, und sodann für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gleichheit beider Seiten in (WF_0). Dabei sind mit (i) konkrete Bedingungen an die Funktionen a und b gestellt, welche nach Satz 2.3 zur Wohldefiniertheit der rechten Seite in (WF_0) äquivalent sind. Insofern stellt die obige Definition eine natürliche Wahl des Lösungsbegriffes dar.

2. Nach Satz 2.1 ist die Gültigkeit der Gleichungen (4.20) notwendig für die Existenz und Eindeutigkeit der Lichtkegelfunktionen eines Funktionenpaares

$\phi = (a, b)$. Sind die Gleichungen erfüllt, so besagt dies, daß sich $a(t)$ und $b(t)$ im Limes $|t| \to \infty$ gegenüber t bzw. $-t$ in einem gewissen Sinne gleich verhalten. Das wichtigste Beispiel ist die folgende Situation: es existiert ein $\omega \in [0, 1[$ mit $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \leq \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$. In diesem Falle sind die Grenzwerte in (4.20) alle gleich $\pm\infty$, d.h. sie existieren im uneigentlichen Sinne, und die Gleichungen (4.20) sind erfüllt. Später werden wir sehen, daß bei tatsächlichen Lösungen von (WF_0) stets diese Situation vorliegt.

3. Anhand eines Beispiels sei verdeutlicht, daß in Satz 2.3 und damit in der Definition auf die Bedingung (4.19) bzw. (4.20) nicht verzichtet werden kann. Wir setzen

$$a(t) := \sqrt{1 + t^2}, \qquad b(t) := 0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wegen $\dot{a}(t) = t/\sqrt{1 + t^2}$ gilt zwar $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ $(t \in \mathbb{R})$, aber (4.19) ist verletzt: mit der Regel von de l'Hospital erhält man

$$\lim_{t \to \infty} t - a(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + t^2}} = 0, \quad \lim_{t \to \infty} t - b(t) = \infty.$$

Die Funktion l_2^+ sollte gemäß (3.1) für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Beziehung

$$l_2^+(t) = t + \left| b(t) - a\big(l_2^+(t)\big) \right| = t + \sqrt{1 + l_2^+(t)^2} \tag{4.21}$$

genügen. Für $t < 0$ folgt hieraus $l_2^+(t) = (t^2 - 1)/2t$. Für $t \geq 0$ hat die implizite Vorschrift (4.21) jedoch keine Lösung. Das Beispiel zeigt, daß die Bedingung $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < 1$ $(t \in \mathbb{R})$ alleine noch nicht die Existenz der Lichtkegelfunktionen von (a, b) gewährleistet.

4. Ist $\phi = (a, b)$ eine Lösung von (WF_0), so sind a und b offenbar beliebig oft stetig differenzierbar. Denn für eine Lösung gilt definitionsgemäß $a, b \in C^2(\mathbb{R})$, und mit $a, b \in C^k(\mathbb{R})$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, ist wegen Satz 2.2 (v) die rechte Seite in (WF_0) $(k-1)$-mal stetig differenzierbar, woraus aufgrund der Gültigkeit der Gleichung (WF_0) aber $a, b \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ folgt. Somit muß $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$ gelten.

Nachdem wir uns mit der Definition 2.4 einen naheliegenden Lösungsbegriff für die Bewegungsgleichungen (WF_0) verschafft haben, führen wir nun noch eine Konvention ein, die uns den Umgang mit dem Differentialgleichungssystem (WF_0) erheblich vereinfacht. Zunächst sei die folgende Beobachtung festgehalten. Ist $\phi = (a, b)$ eine Lösung von (WF_0), so gilt definitionsgemäß $a(t) \neq b(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a > b$ annehmen. Dann sind nach Satz 2.2 (iv) die Ausdrücke

$$a(t) - b\big(l_1^-(t)\big), \quad a(t) - b\big(l_1^+(t)\big), \quad b(t) - a\big(l_2^-(t)\big), \quad b(t) - a\big(l_2^+(t)\big)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ größer als Null. Folglich erfüllen a und b die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot a(t) &= \frac{1}{2}\kappa_1\Big(1-\dot a(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}}\left[\ \frac{1+\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\frac{1}{\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\frac{1}{\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}\ \right]\\
\ddot b(t) &= -\frac{1}{2}\kappa_2\Big(1-\dot b(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}}\left[\ \frac{1-\dot a\big(l_2^-(t)\big)}{1+\dot a\big(l_2^-(t)\big)}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(t)\big)-b(t)\Big)^2}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1+\dot a\big(l_2^+(t)\big)}{1-\dot a\big(l_2^+(t)\big)}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(t)\big)-b(t)\Big)^2}\ \right],
\end{aligned}\tag{WF}$$

und dabei sind l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ implizit durch

$$\begin{aligned}
l_1^-(t) &= t-a(t)+b\big(l_1^-(t)\big), \qquad & l_1^+(t) &= t+a(t)-b\big(l_1^+(t)\big),\\
l_2^-(t) &= t-a\big(l_2^-(t)\big)+b(t), \qquad & l_2^+(t) &= t+a\big(l_2^+(t)\big)-b(t)
\end{aligned}\tag{4.22}$$

gegeben. In Anbetracht der Vereinfachung, welche das System (WF) gegenüber (WF_0) darstellt, erscheint es wünschenswert, die Bewegungsgleichungen von vorneherein in der Form (WF) zu studieren. Man wird also zweckmäßigerweise nur solche Funktionenpaare $\phi = (a, b)$ betrachten, für die $a > b$ gilt. Es besteht daher die Veranlassung zu folgender zusätzlicher Definition.

4.6 Definition und Satz. *Ein Funktionenpaar* $\phi = (a, b) \in \big(C^2(\mathbb{R})\big)^2$ *heißt Lösung der Bewegungsgleichungen* (WF), *wenn folgende Aussagen zutreffen:*

(i) *Es gilt* $a(t) - b(t) > 0$ *und* $|\dot a(t)|, |\dot b(t)| < 1$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *sowie*

$$\lim_{t\to\pm\infty} t-a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t-b(t),$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} t+a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t+b(t),$$

wobei die Grenzwerte im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existieren.

(ii) *Die Gleichungen* (WF) *sind für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *erfüllt.*

Jede Lösung von (WF) *ist auch Lösung von* (WF_0). *Umgekehrt ist jede Lösung* $\phi = (a, b)$ *von* (WF_0) *mit* $a > b$ *auch Lösung von* (WF).

Beweis. Zunächst müssen wir folgendes sicherstellen: Unter der Bedingung (i) ist die rechte Seite in (WF) für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, wobei die Lichtkegelfunktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ durch die Vorschrift (4.22) gegeben sind. Nur dann nämlich ist die Definition sinnvoll. Nach Satz 2.3 gewährleistet (i) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Wohldefiniertheit der rechten Seite in (WF_0), wobei die Lichtkegelfunktionen durch (3.1) gegeben sind. Aufgrund von $a > b$ und Satz 2.2 (iv) gilt

$$\begin{aligned} \frac{a(t) - b(l_1^-(t))}{\left|a(t) - b(l_1^-(t))\right|} &= \frac{a(t) - b(l_1^+(t))}{\left|a(t) - b(l_1^+(t))\right|} = 1, \\ \frac{b(t) - a(l_2^-(t))}{\left|b(t) - a(l_2^-(t))\right|} &= \frac{b(t) - a(l_2^+(t))}{\left|b(t) - a(l_2^+(t))\right|} = -1 \end{aligned} \tag{4.23}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Sofern also die eindeutigen Lösungen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ von (3.1) zugleich eindeutige Lösungen von (4.22) sind, ist mit der rechten Seite in (WF_0) auch jene in (WF) wohldefiniert, denn wegen (4.23) entsprechen sich (WF) und (WF_0) in diesem Falle. Sei also $t \in \mathbb{R}$ beliebig und $l_1^-(t)$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$l_1^-(t) = t - \left|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\right|.$$

Wegen (4.23) ist $l_1^-(t)$ auch Lösung der Gleichung

$$l_1^-(t) = t - a(t) + b\big(l_1^-(t)\big).$$

Wir nehmen an, daß noch eine weitere, von $l_1^-(t)$ verschiedene Lösung $\widetilde{l_1^-}(t)$ dieser Gleichung existiert:

$$\widetilde{l_1^-}(t) = t - a(t) + b\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big), \qquad \widetilde{l_1^-}(t) \neq l_1^-(t).$$

Wegen der Eindeutigkeit von $l_1^-(t)$ muß $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) < 0$ sein. Es gilt also

$$\widetilde{l_1^-}(t) = t + \left|a(t) - b\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\right|.$$

Wegen der Eindeutigkeit von $l_1^+(t)$ folgt hieraus $\widetilde{l_1^-}(t) = l_1^+(t)$. Nach Teil (iv) von Satz 2.2 gilt aber

$$a(t) - b\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big) = a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) > 0,$$

und dies widerspricht unserer Annahme. Demnach muß $\widetilde{l_1^-}(t) = l_1^-(t)$ sein. Analog argumentiert man für l_1^+, l_2^- und l_2^+. Unter der Bedingung (i) sind also durch die Vorschrift (4.22) eindeutig Funktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ erklärt, und diese stimmen mit den eindeutigen Lösungen der Gleichungen (3.1) überein. Deshalb und wegen (4.23) entspricht die rechte Seite in (WF) jener in (WF_0), und insbesondere ist sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Damit ist zugleich auch die Aussage des Satzes bewiesen. □

Wir halten noch das folgende Korollar fest.

4.7 Korollar. *Es sei $\phi = (a, b) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ ein Funktionenpaar mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $a(t) - b(t) > 0$, und es gibt eine Konstante $\omega \in [0, 1[$ mit $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \le \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist die rechte Seite in* (WF_0) *für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.*

Beweis. Wegen $|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \le w < 1$ $(t \in \mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{t\to\pm\infty} t - a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t - b(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t + a(t) = \lim_{t\to\pm\infty} t + b(t) = \pm\infty,$$

und damit genügt $\phi = (a, b)$ der Bedingung (i) in Definition 4.6. Hieraus folgt, daß die rechte Seite in (WF) für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist. □

Im folgenden werden wir die Bewegungsgleichungen nur noch in der Form (WF) untersuchen. Entsprechend beschränken wir fortan unser Augenmerk auf solche Funktionenpaare $\phi = (a, b)$, für die $a > b$ gilt. Daß diese Konvention keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wird durch den vorausgegangenen Satz verbürgt: jede Lösung von (WF) ist auch Lösung von (WF_0); umgekehrt gilt für jede Lösung $\phi = (a, b)$ von (WF_0) entweder $a > b$ oder $a < b$, d.h. sie ist entweder zugleich Lösung der Gleichung (WF), oder sie unterscheidet sich nur durch die Benennung der Teilchen von einer solchen.

§ 5. Asymptotik

In diesem Paragraphen untersuchen wir das asymptotische Verhalten von Lösungen der Bewegungsgleichungen (WF) im Limes $t \to \pm\infty$. Wir nehmen an, daß Lösungen existieren und leiten aus der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen bestimmte Aussagen über den Verlauf dieser Lösungen für große Zeiten her. Hiermit verschaffen wir uns nicht nur ein Bild davon, wie sich (hypothetische) Lösungen von (WF) qualitativ verhalten. Wir werden auch sehen, daß sich sämtliche Lösungen von (WF) anhand bestimmter Daten, die mit ihrem asymptotischen Verhalten in Zusammenhang stehen, klassifizieren lassen. Vor allem aber wird die A-priori-Kenntnis der Asymptotik entscheidend in unsere Beweismethode einfließen, wenn wir in den beiden folgenden Paragraphen zeigen, daß Lösungen der Bewegungsgleichungen (WF) in der Tat existieren.

Zunächst sei ein wichtiger Hilfssatz festgehalten, auf den wir im Verlauf unserer Untersuchung oftmals zurückgreifen werden.

5.1 Hilfssatz. *Ein Funktionenpaar* $\phi = (a,b) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ *genüge der Bedingung* (i) *in Definition 4.6. Dann gilt*

$$\frac{a(t)-b(t)}{2} < a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \le \frac{a(t)-b(t)}{1 - \max\limits_{s\in[l_1^-(t),t]} \dot b(s)}$$

$$\frac{a(t)-b(t)}{2} < a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) \le \frac{a(t)-b(t)}{1 - \max\limits_{s\in[t,l_1^+(t)]} \dot b(s)}$$

$$\frac{a(t)-b(t)}{2} < a\big(l_2^-(t)\big) - b(t) \le \frac{a(t)-b(t)}{1 - \max\limits_{s\in[l_2^-(t),t]} \dot a(s)}$$

$$\frac{a(t)-b(t)}{2} < a\big(l_2^+(t)\big) - b(t) \le \frac{a(t)-b(t)}{1 - \max\limits_{s\in[t,l_2^+(t)]} \dot a(s)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Gültigkeit der Bedingung (i) in Definition 4.6 gewährleistet, daß $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$ als Lösungen der Gleichungen (4.22) für jedes $t \in \mathbb{R}$ existieren und eindeutig bestimmt sind. Wir beschränken uns auf den Beweis der beiden Ungleichungen für $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)$. Alle weiteren Ungleichungen beweist man vollkommen analog.

Es sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Nach Voraussetzung gilt $a(t) - b(t) > 0$. Dies hat nach Teil (iv) von Satz 4.2 $a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) > 0$ und damit gemäß (4.22) $l_1^-(t) < t$ zur Folge. Der Mittelwertsatz verschafft uns also die Abschätzungen

$$\begin{aligned} a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) &= a(t) - b(t) + \Big(b(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big) \\ &\le a(t) - b(t) + \Big(\max_{s\in[l_1^-(t),t]} \dot b(s)\Big)\big(t - l_1^-(t)\big) \end{aligned}$$

sowie analog

$$a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \ge a(t) - b(t) + \Big(\min_{s\in[l_1^-(t),t]} \dot b(s)\Big)\big(t - l_1^-(t)\big).$$

Wegen $|\dot b| < 1$ nach Voraussetzung und $t - l_1^-(t) = a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)$ gemäß (4.22) folgt

$$\begin{aligned} a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) &\le a(t) - b(t) + \Big(\max_{s\in[l_1^-(t),t]} \dot b(s)\Big)\Big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big), \\ a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) &> a(t) - b(t) - \Big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big) \end{aligned}$$

und damit
$$\frac{a(t)-b(t)}{2} < a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \le \frac{a(t)-b(t)}{1 - \max\limits_{s\in[l_1^-(t),t]} \dot{b}(s)},$$
wie im Hilfssatz behauptet. □

Wir kommen nun zu einem ersten Satz, welcher das asymptotische Verhalten der Lösungen von (WF) für große Zeiten zum Inhalt hat. Er besagt anschaulich, daß sich zwei abstoßende Punktladungen, deren Bewegung durch die Gleichungen (WF) beschrieben wird, im Limes $|t| \to \infty$ stets unendlich weit voneinander entfernen, und daß die Teilchen dabei niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen.

5.2 Satz. *Es sei $\phi = (a, b)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen* (WF). *Dann haben a und b folgende Eigenschaften:*

(i) *Die Grenzwerte*
$$\begin{aligned} u_{-\infty} &:= \lim_{t\to-\infty} \dot{a}(t), \qquad & u_{\infty} &:= \lim_{t\to\infty} \dot{a}(t), \\ v_{-\infty} &:= \lim_{t\to-\infty} \dot{b}(t), \qquad & v_{\infty} &:= \lim_{t\to\infty} \dot{b}(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$
existieren, und es gilt
$$|u_{-\infty}|, |u_{\infty}|, |v_{-\infty}|, |v_{\infty}| < 1. \tag{5.2}$$
Für jedes $\omega \in [0, 1[$ mit
$$\omega \ge \max\{|u_{-\infty}|, |u_{\infty}|, |v_{-\infty}|, |v_{\infty}|\} \tag{5.3}$$
gilt
$$|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \le \omega < 1 \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{5.4}$$

(ii) *Es gilt*
$$u_{-\infty} - v_{-\infty} < 0, \qquad u_{\infty} - v_{\infty} > 0 \tag{5.5}$$
und
$$\lim_{t\to\pm\infty} a(t) - b(t) = \infty. \tag{5.6}$$

Beweis. (i) Wegen $\ddot{a} > 0$ und $|\dot{a}| < 1$ gemäß (WF) und Definition 4.6 existiert der Grenzwert
$$u_{\infty} := \lim_{t\to\infty} \dot{a}(t),$$

und es gilt $|u_\infty| \leq 1$. Wir zeigen, daß hier sogar die strenge Ungleichheit besteht. Ist $\phi = (a, b)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF), so gilt

$$\begin{aligned}\frac{1-\theta\dot{a}(t)}{\sqrt{1-\dot{a}(t)^2}} = {}& \frac{1-\theta\dot{a}(t_0)}{\sqrt{1-\dot{a}(t_0)^2}} \\ & +\frac{1}{2}\kappa_1\int\limits_{t_0}^{t}\big(-\theta+\dot{a}(s)\big)\left[\frac{1+\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)}{1-\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right. \\ & \left. +\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)}{1+\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right]ds\end{aligned} \tag{5.7}$$

für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $\theta \in]-1,1[$. Aufgrund der Gültigkeit von (WF) läßt sich die rechte Seite nämlich gemäß

$$\begin{aligned}& \frac{1-\theta\dot{a}(t_0)}{\sqrt{1-\dot{a}(t_0)^2}}+\frac{1}{2}\kappa_1\int\limits_{t_0}^{t}\big(-\theta+\dot{a}(s)\big)\left[\frac{1+\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)}{1-\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right. \\ & \qquad\qquad \left. +\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)}{1+\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right]ds \\ & = \frac{1-\theta\dot{a}(t_0)}{\sqrt{1-\dot{a}(t_0)^2}}+\int\limits_{t_0}^{t}\big(-\theta+\dot{a}(s)\big)\frac{\ddot{a}(s)}{\big(1-\dot{a}(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}}ds \\ & = \frac{1-\theta\dot{a}(t_0)}{\sqrt{1-\dot{a}(t_0)^2}}+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{d}{ds}\frac{1-\theta\dot{a}(s)}{\sqrt{1-\dot{a}(s)^2}}\right)ds \\ & = \frac{1-\theta\dot{a}(t)}{\sqrt{1-\dot{a}(t)^2}}\end{aligned}$$

umformen, d.h. rechte und linke Seite in (5.7) sind tatsächlich gleich (siehe auch die Bemerkung 5.3 weiter unten). Nun müssen wir den Integranden in (5.7) abschätzen. Zu diesem Zwecke halten wir $t_0 \in \mathbb{R}$ fest und treffen für den Parameter θ die Wahl $\theta := \dot{b}\big(l_1^-(t_0)\big)$. Wegen $\ddot{b} < 0$ gemäß (WF) bedeutet dies $\theta \geq \dot{b}(s)$ für alle $s \geq l_1^-(t_0)$. Hieraus folgt aber

$$\theta \geq \dot{b}\big(l_1^-(s)\big), \quad \theta \geq \dot{b}\big(l_1^+(s)\big) \qquad \text{für alle } s \geq t_0,$$

denn nach Satz 4.2 ist l_1^- streng monoton wachsend und es gilt $l_1^+ > l_1^-$. Hiermit erhalten wir nun die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\big(-\theta + \dot a(s)\big)\big(1 + \dot b\big(l_1^-(s)\big)\big)& \\ &= \big(1+\theta\big)\Big(\dot a(s) - \dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big) + \big(1 + \dot a(s)\big)\Big(\dot b\big(l_1^-(s)\big) - \theta\Big) \\ &\leq \big(1+\theta\big)\Big(\dot a(s) - \dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\end{aligned} \tag{5.8}$$

und

$$\begin{aligned}\big(-\theta + \dot a(s)\big)\big(1 - \dot b\big(l_1^+(s)\big)\big)& \\ &= \big(1-\theta\big)\Big(\dot a(s) - \dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big) + \big(1 + \dot a(s)\big)\Big(\dot b\big(l_1^+(s)\big) - \theta\Big) \\ &\leq \big(1-\theta\big)\Big(\dot a(s) - \dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\end{aligned} \tag{5.9}$$

für alle $s \geq t_0$. Gemäß (4.22) und der Kettenregel gilt außerdem

$$\dot l_1^-(s) = \frac{1 - \dot a(s)}{1 - \dot b\big(l_1^-(s)\big)}, \quad \dot l_1^+(s) = \frac{1 + \dot a(s)}{1 + \dot b\big(l_1^+(s)\big)} \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{5.10}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned}-\frac{d}{ds}\frac{1}{a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)} &= \frac{\dot a(s) - \dot b\big(l_1^-(s)\big)}{\Big(1 - \dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\Big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}, \\ -\frac{d}{ds}\frac{1}{a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)} &= \frac{\dot a(s) - \dot b\big(l_1^+(s)\big)}{\Big(1 + \dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\Big(a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\end{aligned}\right\} \quad (s \in \mathbb{R}). \tag{5.11}$$

Mit Hilfe von (5.8), (5.9) und (5.11) ergibt sich jetzt für den Integranden in (5.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\big(-\theta + \dot a(s)\big)\Bigg[\frac{1 + \dot b\big(l_1^-(s)\big)}{1 - \dot b\big(l_1^-(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2} \\ &\qquad + \frac{1 - \dot b\big(l_1^+(s)\big)}{1 + \dot b\big(l_1^+(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\Bigg] \\ &\leq \frac{\big(1+\theta\big)\Big(\dot a(s) - \dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)}{\Big(1 - \dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\Big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2} + \frac{\big(1-\theta\big)\Big(\dot a(s) - \dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)}{\Big(1 + \dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\Big(a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2} \\ &= -\frac{d}{ds}\frac{1+\theta}{a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)} - \frac{d}{ds}\frac{1-\theta}{a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)}\end{aligned} \tag{5.12}$$

für alle $s \geq t_0$. Wir erhalten also aus (5.7) mit Satz 4.2

$$\begin{aligned}\frac{1-\theta\dot{a}(t)}{\sqrt{1-\dot{a}(t)^2}} \leq{} & \frac{1-\theta\dot{a}(t_0)}{\sqrt{1-\dot{a}(t_0)^2}} \\ & + \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1+\theta}{a(t_0)-b\big(l_1^-(t_0)\big)} - \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1+\theta}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)} \\ & + \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1-\theta}{a(t_0)-b\big(l_1^+(t_0)\big)} - \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1-\theta}{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)} \\ < {} & \frac{1-\theta\dot{a}(t_0)}{\sqrt{1-\dot{a}(t_0)^2}} + \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1+\theta}{a(t_0)-b\big(l_1^-(t_0)\big)} + \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1-\theta}{a(t_0)-b\big(l_1^+(t_0)\big)}\end{aligned}$$

für alle $t \geq t_0$. Da die rechte Seite dieser Ungleichung, sie sei mit K bezeichnet, nicht von t abhängt, gilt

$$\frac{1-\theta u_\infty}{\sqrt{1-u_\infty^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1-\theta\dot{a}(t)}{\sqrt{1-\dot{a}(t)^2}} \leq K < \infty$$

und demnach $|u_\infty| \neq 1$.

Die entsprechenden Aussagen für $u_{-\infty}$, $v_{-\infty}$ und v_∞ zeigt man analog. Zum Beweis von $|u_{-\infty}| < 1$ etwa setzt man $\theta := \dot{b}\big(l_1^+(t_0)\big)$ und benutzt $\theta \leq \dot{b}(s)$ für $s \leq l_1^+(t_0)$, um in Analogie zu (5.8) bzw. (5.9) für alle $s \leq t_0$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\big(-\theta+\dot{a}(s)\big)\Big(1+\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)\Big) &\geq (1+\theta)\Big(\dot{a}(s)-\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)\Big), \\ \big(-\theta+\dot{a}(s)\big)\Big(1-\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)\Big) &\geq (1-\theta)\Big(\dot{a}(s)-\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)\Big)\end{aligned}$$

zu gewinnen, anhand derer sich wieder das Integral in (5.7) durch eine von t unabhängige Konstante abschätzen läßt, woraus schließlich $|u_{-\infty}| \neq 1$ folgt.

Wegen $\ddot{a} > 0$ und $\ddot{b} < 0$ gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{a}(t)| = \max\{|u_{-\infty}|, |u_\infty|\}, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{b}(t)| = \max\{|v_{-\infty}|, |v_\infty|\},$$

und mit (5.3) gilt daher (5.4).

(ii) Nach Hilfssatz 5.1 zusammen mit der Abschätzung (5.4) aus Teil (i) gilt

$$\begin{aligned}a(t)-b\big(l_1^-(t)\big) &\leq \frac{d(t)}{1-\omega}, & a(t)-b\big(l_1^+(t)\big) &\leq \frac{d(t)}{1-\omega}, \\ a\big(l_2^-(t)\big)-b(t) &\leq \frac{d(t)}{1-\omega}, & a\big(l_2^+(t)\big)-b(t) &\leq \frac{d(t)}{1-\omega}\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus (WF) ergibt sich daher

$$\ddot{d}(t) = \ddot{a}(t) - \ddot{b}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)\big(1-\omega^2\big)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1-\omega}{2}\left(\frac{1-\omega}{d(t)}\right)^2+\frac{1-\omega}{2}\left(\frac{1-\omega}{d(t)}\right)^2\right] \qquad (5.13)\\
&\geq \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)(1-\omega)^5\frac{1}{d(t)^2}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun nehmen wir an, daß

$$\lim_{t\to\infty} \dot{d}(t) = 0 \tag{5.14}$$

gilt. Aufgrund von $\ddot{d} > 0$ impliziert dies $\dot{d}(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wegen (5.13) und $d > 0$ folgt hieraus für ein beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\ddot{d}(t) \geq \frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)(1-\omega)^5\frac{1}{d(t_0)^2} > 0 \quad \text{für alle } t \geq t_0,$$

welche jedoch zur Konsequenz hat, daß $\dot{d}(t)$ im Limes $t \to \infty$ gegen Unendlich strebt. Also haben wir die Annahme (5.14) zu einem Widerspruch geführt. Da aber $d > 0$ ausschließt, daß der Grenzwert in (5.14) kleiner Null ist, erhalten wir schließlich

$$\lim_{t\to\infty} \dot{d}(t) > 0$$

und hiermit

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = \infty,$$

wie in (5.5) bzw. (5.6) behauptet. Die entsprechenden Aussagen für $t \to -\infty$ beweist man auf die gleiche Weise. □

5.3 Bemerkung. Für jedes $\theta \in]-1,1[$ ist die Gleichung (5.7) mit der Bewegungsgleichung (WF) für a gleichbedeutend. Hierin kommt auf gewisse Weise die Lorentzinvarianz der Bewegungsgleichungen (WF) zum Ausdruck, wobei der Parameter θ für die Geschwindigkeit steht, mit welcher sich das betrachtete Koordinatensystem relativ zu einem anderen bewegt. Die Gleichung (5.7) dient uns zum Beweis der Abschätzung $|u_{-\infty}| < 1$. Entscheidend ist dabei die richtige Wahl des Parameters θ. Würden wir einfach die Bewegungsgleichung (WF) in Integralform betrachten, was der Wahl $\theta := 0$ entspräche, so ließe sich der Integrand im allgemeinen nicht geeignet abschätzen. Die Gültigkeit der hierzu benötigten Ungleichungen (5.8) und (5.9) für alle $s \geq t_0$ gewährleistet erst die Wahl $\theta := \dot{b}\big(l_1^-(t_0)\big)$. Sie entspricht dem Übergang zu einem Koordinatensystem, in welchem die Geschwindigkeit $\dot{b} - \theta$ des zweiten Teilchens kleiner oder gleich Null ist. Damit haben wir also beim Beweis der Abschätzungen (5.2) indirekt die Lorentzinvarianz der Bewegungsgleichungen (WF) ausgenutzt.

Der folgende Satz gibt explizit die Form der Asymptoten an, gegen die eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) im Limes $|t| \to \infty$ konvergiert. Die

Asymptoten unterscheiden sich von Geraden durch eine logarithmische Korrektur.

5.4 Satz. *Es sei* $\phi = (a, b)$ *eine Lösung der Bewegungsgleichungen* (WF) *mit* $u_{-\infty}$, u_{∞}, $v_{-\infty}$ *und* v_{∞} *gemäß* (5.1). *Dann lassen sich* $a(t)$ *und* $b(t)$ *anhand von Konstanten* $x_{-\infty}, y_{-\infty}, x_{\infty}, y_{\infty} \in \mathbb{R}$ *sowie Funktionen* $R_{-\infty}, S_{-\infty} \in C^{\infty}(]-\infty, 0[)$, $R_{\infty}, S_{\infty} \in C^{\infty}(]0, \infty[)$ *in der Form*

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= x_{-\infty} + u_{-\infty} t - \frac{\kappa_1\big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2}\ \ln(-t) + R_{-\infty}(t), \\ b(t) &= y_{-\infty} + v_{-\infty} t + \frac{\kappa_2\big(1-v_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-u_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2}\ \ln(-t) + S_{-\infty}(t) \end{aligned}\right\} \textit{für } t < 0 \tag{5.15}$$

und

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= x_{\infty} + u_{\infty} t - \frac{\kappa_1\big(1-u_{\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-v_{\infty}^2\big)}{(u_{\infty}-v_{\infty})^2}\ \ln(t) + R_{\infty}(t), \\ b(t) &= y_{\infty} + v_{\infty} t + \frac{\kappa_2\big(1-v_{\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-u_{\infty}^2\big)}{(u_{\infty}-v_{\infty})^2}\ \ln(t) + S_{\infty}(t) \end{aligned}\right\} \textit{für } t > 0 \tag{5.16}$$

darstellen, wobei gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \frac{-t}{\ln(-t)} R_{-\infty}(t) &= \varrho_{-\infty}, & \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\ln(t)} R_{\infty}(t) &= \varrho_{\infty}, \\ \lim_{t\to-\infty} \frac{-t}{\ln(-t)} S_{-\infty}(t) &= \varsigma_{-\infty}, & \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\ln(t)} S_{\infty}(t) &= \varsigma_{\infty}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

mit

$$\begin{aligned} \varrho_{-\infty} &:= -\kappa_1\big(1-v_{-\infty}^2\big)^2\big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{5}{2}} \frac{\kappa_1\big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}} + \kappa_2\big(1-v_{-\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^5}, \\ \varsigma_{-\infty} &:= \kappa_2\big(1-u_{-\infty}^2\big)^2\big(1-v_{-\infty}^2\big)^{\frac{5}{2}} \frac{\kappa_1\big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}} + \kappa_2\big(1-v_{-\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^5}, \\ \varrho_{\infty} &:= \kappa_1\big(1-v_{\infty}^2\big)^2\big(1-u_{\infty}^2\big)^{\frac{5}{2}} \frac{\kappa_1\big(1-u_{\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}} + \kappa_2\big(1-v_{\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{(u_{\infty}-v_{\infty})^5}, \\ \varsigma_{\infty} &:= -\kappa_2\big(1-u_{\infty}^2\big)^2\big(1-v_{\infty}^2\big)^{\frac{5}{2}} \frac{\kappa_1\big(1-u_{\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}} + \kappa_2\big(1-v_{\infty}^2\big)^{\frac{1}{2}}}{(u_{\infty}-v_{\infty})^5}. \end{aligned}$$

5.5 Bemerkungen. 1. Wie der Satz zeigt, ist das aymptotische Verhalten von Lösungen der Bewegungsgleichungen (WF) durch vier reelle Zahlen charakterisiert. Für $t \to -\infty$ etwa sind dies $x_{-\infty}$, $y_{-\infty}$, $u_{-\infty}$ und $v_{-\infty}$ gemäß (5.15). Während dabei $x_{-\infty}, y_{-\infty} \in \mathbb{R}$ keiner Einschränkung unterliegen, gilt für $u_{-\infty}$ und $v_{-\infty}$ stets $-1 < u_{-\infty} < v_{-\infty} < 1$. Aus physikalischer Sicht kommt in dieser Einschränkung an $u_{-\infty}$ und $v_{-\infty}$ zum Ausdruck, daß die Teilchen sich infolge ihrer Abstoßung im Limes $t \to -\infty$ unendlich weit voneinander entfernen (bzw. daß sie sich aus unendlicher Entfernung aufeinander zubewegen), ohne daß sie dabei die Lichtgeschwindigkeit erreichen können. Sofern es überhaupt Lösungen von (WF) gibt, läßt sich die Gesamtheit aller Lösungen also anhand der vier reellen Daten $x_{-\infty}$, $y_{-\infty}$, $u_{-\infty}$ und $v_{-\infty}$ klassifizieren. Im Gegensatz zu den Anfangswerten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind diese Daten jedoch keinem endlichen Zeitpunkt zugehörig, sondern sie legen den asymptotischen Verlauf für $t \to -\infty$ fest. In den beiden folgenden Paragraphen werden wir beweisen, daß in der Tat zu jedem derartigen Quadrupel asymptotischer Daten eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) existiert.

2. Ist $\phi = (a, b)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF), so streben die Funktionen a und b im Limes $|t| \to \infty$ gegen Asymptoten der Form

$$x + ut + \eta \ln(|t|),$$

mit Konstanten $x, \eta \in \mathbb{R}$ und $u \in]-1, 1[$. Es mag verwunderlich erscheinen, daß die Asymptoten keine Geraden sind, die Teilchen sich asymptotisch also nicht geradlinig gleichförmig bewegen. Ursache hierfür ist der langreichweitige Charakter der Coulomb-Kraft, welcher sich in einer logarithmischen Korrektur der Asymptotik auswirkt. Ein vergleichbarer Effekt tritt auch bei der nichtrelativistischen (klassischen und quantenmechanischen) Coulomb-Streuung auf.

Beweis von Satz 5.4. Das wesentliche an dem Satz ist nicht die Darstellung (5.15) bzw. (5.16) von $a(t)$ und $b(t)$ (eine solche ist immer möglich), sondern die Asymptotik der Restglieder $R_{-\infty}$, $S_{-\infty}$, R_{∞} und S_{∞} gemäß (5.17). Wir beschränken uns auf den Beweis von

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\ln t} R_\infty(t) = \kappa_1 \big(1 - v_\infty^2\big)^2 \big(1 - u_\infty^2\big)^{\frac{5}{2}} \frac{\kappa_1 \big(1 - u_\infty^2\big)^{\frac{1}{2}} + \kappa_2 \big(1 - v_\infty^2\big)^{\frac{1}{2}}}{(u_\infty - v_\infty)^5};$$

die übrigen Grenzwertaussagen in (5.17) beweist man völlig analog hierzu.

Unsere Beweismethode besteht darin, mit Hilfe von (WF), Satz 5.2 und der Regel von de l'Hospital die ersten Terme einer asymptotischen Entwicklung von $\dot a(t) - u_\infty$ zu berechnen (vgl. [15]) und hieraus durch Integration auf das asymptotische Verhalten von $a(t)$ zu schließen.

Nach Hilfssatz 5.1 und Teil (ii) von Satz 5.2 gilt

$$\lim_{t\to\infty} a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) \geq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\big(a(t) - b(t)\big) = \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) \geq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\big(a(t)-b(t)\big) = \infty.$$

Die Regel von de l'Hospital zusammen mit (5.10) ergibt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)} = \frac{1}{u_\infty - v_\infty\dfrac{1-u_\infty}{1-v_\infty}} = \frac{1-v_\infty}{u_\infty - v_\infty},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)} = \frac{1}{u_\infty - v_\infty\dfrac{1+u_\infty}{1+v_\infty}} = \frac{1+v_\infty}{u_\infty - v_\infty}.$$

Beachtet man noch, daß nach Teil (i) und Teil (iii) von Satz 4.2

$$\lim_{t\to\infty} l_1^-(t) = \lim_{t\to\infty} l_1^+(t) = \infty \tag{5.18}$$

gilt, so folgt aus (WF)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} t^2\ddot a(t) &= \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1+v_\infty}{1-v_\infty}\left(\frac{1-v_\infty}{u_\infty-v_\infty}\right)^2 + \frac{1-v_\infty}{1+v_\infty}\left(\frac{1+v_\infty}{u_\infty-v_\infty}\right)^2\right] \\ &= \frac{\kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-v_\infty^2\big)}{(u_\infty-v_\infty)^2} =: \eta_1.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Mit der Regel von de l'Hospital erhalten wir demnach

$$\lim_{t\to\infty} t\big(\dot a(t)-u_\infty\big) = -\lim_{t\to\infty} t^2\ddot a(t) = -\eta_1.$$

Der führende Term in einer asymptotischen Entwicklung von $\dot a(t)-u_\infty$ ist also $-\eta_1/t$. Die alleinige Kenntnis dieses Terms ist für unsere Zwecke allerdings noch nicht ausreichend. Wir zeigen deshalb als nächstes, daß der Limes

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\ln t}\left(\dot a(t) - u_\infty + \eta_1\frac{1}{t}\right) &= \lim_{t\to\infty} \frac{-t^3}{2\ln t - 1}\left(\ddot a(t) - \eta_1\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{-t}{2\ln t - 1}\Big(t^2\ddot a(t) - \eta_1\Big) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2\ln t - 3}\Big(t^2\dddot a(t) + 2t\ddot a(t)\Big)\end{aligned} \tag{5.20}$$

existiert und geben seinen Wert an. Für die Umformungen in (5.20) haben wir wieder die Regel von de l'Hospital verwendet. Differentiation in (WF) ergibt

$$\dddot a(t) = U_1(t) + U_2(t) + U_3(t), \tag{5.21}$$

mit

$$
\begin{aligned}
U_1(t) &= -\frac{3\dot a(t)\ddot a(t)^2}{\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)},\\
U_2(t) &= \frac{1}{2}\kappa_1\Big(1-\dot a(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\frac{2\ddot b\big(l_1^-(t)\big)\big(1-\dot a(t)\big)}{\Big(1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^3\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}\\
&\qquad -\frac{2\ddot b\big(l_1^+(t)\big)\big(1+\dot a(t)\big)}{\Big(1+\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^3\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}\Bigg],\\
U_3(t) &= \frac{1}{2}\kappa_1\Big(1-\dot a(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}}\Bigg[-\frac{2\Big(1+\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)}{\Big(1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^3}\\
&\qquad -\frac{2\Big(1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)}{\Big(1+\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^3}\Bigg]
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus (5.19) folgt unmittelbar

$$
\lim_{t\to\infty} t^4 U_1(t) = -\frac{3u_\infty \eta_1^2}{\kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)}. \tag{5.22}
$$

Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^4 U_2(t) &= \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}}\Bigg[-\frac{2\left(\dfrac{1-v_\infty}{1-u_\infty}\right)^2\eta_2^2(1-u_\infty)(1-v_\infty)^2}{(1-v_\infty)^3(u_\infty-v_\infty)^2}\\
&\qquad +\frac{2\left(\dfrac{1+v_\infty}{1+u_\infty}\right)^2\eta_2^2(1+u_\infty)(1+v_\infty)^2}{(1+v_\infty)^3(u_\infty-v_\infty)^2}\Bigg] \qquad (5.23)\\
&= -\frac{2\kappa_1\eta_2^2\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{1}{2}}}{u_\infty-v_\infty},
\end{aligned}
$$

mit

$$
\lim_{t\to\infty} -t^2\ddot b(t) = \frac{\kappa_2\big(1-v_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-u_\infty^2\big)}{(u_\infty-v_\infty)^2} =: \eta_2
$$

in Analogie zu (5.19) und

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^2\ddot{b}\big(l_1^-(t)\big) &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{l_1^-(t)^2} \lim_{t\to\infty} l_1^-(t)^2\ddot{b}\big(l_1^-(t)\big) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\dot{l}_1^-(t)^2} \lim_{t\to\infty} t^2\ddot{b}(t) \\
&= -\left(\frac{1-v_\infty}{1-u_\infty}\right)^2 \eta_2, \\
\lim_{t\to\infty} t^2\ddot{b}\big(l_1^+(t)\big) &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{l_1^+(t)^2} \lim_{t\to\infty} l_1^+(t)^2\ddot{b}\big(l_1^+(t)\big) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\dot{l}_1^+(t)^2} \lim_{t\to\infty} t^2\ddot{b}(t) \\
&= -\left(\frac{1+v_\infty}{1+u_\infty}\right)^2 \eta_2
\end{aligned}
$$

gemäß (5.18), (5.10) und der Regel von de l'Hospital. Gemeinsam ergeben (5.22) und (5.23)

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2\ln t-3} t^2\big(U_1(t)+U_2(t)\big) = 0. \tag{5.24}
$$

Zur Berechnung von

$$
\begin{aligned}
&\frac{t^2}{2\ln t-3}\Big(t^2U_3(t)+2t\ddot{a}(t)\Big) \\
&\quad = \kappa_1\Big(1-\dot{a}(t)^2\Big)^{\frac{3}{2}} \\
&\qquad \times \Bigg[\frac{\Big(1+\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\Big)\Big(\dot{a}(t)-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\Big)t^2}{\Big(1-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} \\
&\qquad\qquad \times \frac{t}{2\ln t-3}\left(\frac{1-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)}{\dot{a}(t)-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{t}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}\right) \\
&\qquad + \frac{\Big(1-\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\Big)\Big(\dot{a}(t)-\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\Big)t^2}{\Big(1+\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} \\
&\qquad\qquad \times \frac{t}{2\ln t-3}\left(\frac{1+\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}{\dot{a}(t)-\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)} - \frac{t}{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}\right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

im Limes $t \to \infty$ zeigen wir zunächst, daß

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{2\ln t - 3}\left(\frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{t}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}\right)$$
$$= -\frac{(\eta_1+\eta_2)(1-v_\infty)}{2(u_\infty-v_\infty)^2} \tag{5.26}$$

gilt. Wir schreiben

$$\frac{t}{2\ln t - 3}\left(\frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{t}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}\right)$$
$$= -\frac{1-v_\infty}{u_\infty-v_\infty}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\frac{t}{2\ln t-3}\left(\frac{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{u_\infty-v_\infty}{1-v_\infty}\right) \tag{5.27}$$
$$+\frac{1-v_\infty}{u_\infty-v_\infty}\frac{t}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}\frac{1}{2\ln t-3}\left(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big) - \frac{u_\infty-v_\infty}{1-v_\infty}t\right).$$

Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} t\left(\frac{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{u_\infty-v_\infty}{1-v_\infty}\right)$$
$$= -\lim_{t\to\infty} t^2\left(\frac{\ddot a(t)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{\ddot b\big(l_1^-(t)\big)\big(1-\dot a(t)\big)}{\Big(1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{\ddot b\big(l_1^-(t)\big)\big(1-\dot a(t)\big)\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)}{\Big(1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^3}\right) \tag{5.28}$$
$$= -\frac{\eta_1}{1-v_\infty} - \frac{\eta_2}{1-u_\infty} + \frac{\eta_2(u_\infty-v_\infty)}{(1-u_\infty)(1-v_\infty)}$$
$$= -\frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}.$$

Hieraus folgt zum einen, daß der erste Term auf der rechten Seite in (5.27) für $t\to\infty$ gegen Null strebt, und zum anderen, daß

$$\lim_{t\to\infty} a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) - \frac{u_\infty-v_\infty}{1-v_\infty}t = -\infty \tag{5.29}$$

gilt. Definieren wir nämlich

$$r(t) := \frac{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{u_\infty-v_\infty}{1-v_\infty} + \frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\frac{1}{t} \quad (t>0),$$

so gilt nach (5.28)

$$\lim_{t\to\infty} tr(t) = 0.$$

Wir können daher $t_0 > 0$ so groß wählen, daß für alle $t \geq t_0$

$$t|r(t)| \leq \frac{1}{2}\frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}$$

und folglich

$$\int_{t_0}^{t} r(s)ds \leq \int_{t_0}^{t} |r(s)|ds \leq \frac{1}{2}\frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s}ds \leq \frac{1}{2}\frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\ln t$$

gilt. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) - \frac{u_\infty - v_\infty}{1-v_\infty}t \\
&\quad = a(t_0) - b\big(l_1^-(t_0)\big) - \frac{u_\infty - v_\infty}{1-v_\infty}t_0 - \frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\ln t + \frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\ln t_0 + \int_{t_0}^{t} r(s)ds \\
&\quad \leq a(t_0) - b\big(l_1^-(t_0)\big) - \frac{u_\infty - v_\infty}{1-v_\infty}t_0 + \frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\ln t_0 - \frac{1}{2}\frac{\eta_1+\eta_2}{1-v_\infty}\ln t
\end{aligned}$$

für alle $t \geq t_0$, woraus (5.29) folgt. Demnach gilt gemäß der Regel von de l'Hospital sowie (5.28) für den zweiten Term auf der rechten Seite in (5.27)

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\frac{1-v_\infty}{u_\infty - v_\infty}\frac{t}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}\frac{\ln t}{2\ln t - 3}\frac{1}{\ln t}\left(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) - \frac{u_\infty - v_\infty}{1-v_\infty}t\right) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1-v_\infty}{u_\infty - v_\infty}\right)^2 \lim_{t\to\infty} t\left(\frac{\dot a(t) - \dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)} - \frac{u_\infty - v_\infty}{1-v_\infty}\right) \\
&\qquad = -\frac{(\eta_1+\eta_2)(1-v_\infty)}{2(u_\infty - v_\infty)^2},
\end{aligned}$$

und damit ist (5.26) gezeigt. Analog beweist man, daß

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\frac{t}{2\ln t - 3}\left(\frac{1+\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)} - \frac{t}{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}\right) \\
&\qquad = -\frac{(\eta_1+\eta_2)(1+v_\infty)}{2(u_\infty - v_\infty)^2}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

gilt. Aus (5.25) ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2\ln t - 3}\Big(t^2 U_3(t) + 2t\ddot{a}(t)\Big) \\
&\quad = \kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{(1+v_\infty)(u_\infty - v_\infty)}{(1-v_\infty)^2} \left(\frac{1-v_\infty}{u_\infty - v_\infty}\right)^2 \frac{(\eta_1+\eta_2)(1-v_\infty)}{2(u_\infty - v_\infty)^2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{(1-v_\infty)(u_\infty - v_\infty)}{(1+v_\infty)^2} \left(\frac{1+v_\infty}{u_\infty - v_\infty}\right)^2 \frac{(\eta_1+\eta_2)(1+v_\infty)}{2(u_\infty - v_\infty)^2} \right] \qquad (5.31) \\
&\quad = -\frac{\kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}}(\eta_1+\eta_2)\big(1-v_\infty^2\big)}{(u_\infty - v_\infty)^3}.
\end{aligned}$$

Wir fassen jetzt (5.21), (5.24) und (5.31) zusammen und erhalten, daß der Limes (5.20) existiert und den Wert

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{\ln t}\left(\dot{a}(t) - u_\infty + \eta_1 \frac{1}{t}\right) &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2\ln t - 3}\Big(t^2 \dddot{a}(t) + 2t\ddot{a}(t)\Big) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2\ln t - 3}\Big(t^2 U_3(t) + 2t\ddot{a}(t)\Big) \qquad (5.32) \\
&= -\frac{\kappa_1\big(1-u_\infty^2\big)^{\frac{3}{2}}(\eta_1+\eta_2)\big(1-v_\infty^2\big)}{(u_\infty - v_\infty)^3}
\end{aligned}$$

hat. Insbesondere gilt

$$\lim_{t\to\infty} t^{2-\varepsilon}\left(\dot{a}(t) - u_\infty + \eta_1\frac{1}{t}\right) = 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0. \qquad (5.33)$$

Mit einem beliebigen $t_0 > 0$ setzen wir nun

$$x_\infty := a(t_0) - u_\infty t_0 + \eta_1 \ln t_0 + \int_{t_0}^{\infty} \left(\dot{a}(s) - u_\infty + \eta_1 \frac{1}{s}\right) ds$$

und

$$R_\infty(t) := -\int_t^\infty \left(\dot{a}(s) - u_\infty + \eta_1\frac{1}{s}\right) ds \quad (t > 0).$$

Wegen (5.33) existieren hier die uneigentlichen Integrale, und aus $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ folgt $R_\infty \in C^\infty(]0,\infty[)$. Für $t > 0$ läßt sich $a(t)$ also in der Form

$$a(t) = x_\infty + u_\infty t - \eta_1 \ln t + R_\infty(t)$$

schreiben, wobei das Restglied $R_\infty(t)$ gemäß (5.32) die Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\ln t}R_\infty(t) &= -\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\ln t+1}\int\limits_t^\infty\left(\dot a(s)-u_\infty+\eta_1\frac{1}{s}\right)ds\\
&= -\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{\ln t}\left(\dot a(t)-u_\infty+\eta_1\frac{1}{t}\right)\\
&= \frac{\kappa_1\bigl(1-u_\infty^2\bigr)^{\frac{3}{2}}(\eta_1+\eta_2)\bigl(1-v_\infty^2\bigr)}{(u_\infty-v_\infty)^3}\\
&= \kappa_1\bigl(1-v_\infty^2\bigr)^2\bigl(1-u_\infty^2\bigr)^{\frac{5}{2}}\frac{\kappa_1\bigl(1-u_\infty^2\bigr)^{\frac{1}{2}}+\kappa_2\bigl(1-v_\infty^2\bigr)^{\frac{1}{2}}}{(u_\infty-v_\infty)^5}
\end{aligned}
$$

besitzt. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

§ 6. Bedingte Lösungen

In diesem Paragraphen beweisen wir die Existenz bedingter Lösungen der Bewegungsgleichungen (WF). Hierbei handelt es sich um Funktionenpaare $\phi = (a,b)$ auf $\mathbb{R}$, für welche die Gleichungen (WF) auf einem kompakten Intervall $J\subset\mathbb{R}$ erfüllt sind. Mit ihrer Hilfe werden wir im folgenden Paragraphen Lösungen der Bewegungsgleichungen (WF) im eigentlichen Sinne konstruieren.

6.1 Definition. *Es sei $\phi=(a,b)\in\bigl(C^1(\mathbb{R})\bigr)^2$ ein Funktionenpaar mit folgender Eigenschaft: für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt $a(t)-b(t)>0$, und es gibt ein $\omega\in[0,1[$ mit $|\dot a(t)|, |\dot b(t)|\le\omega$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Weiter sei $J:=[\sigma,\tau]\subset\mathbb{R}$ mit $\sigma<\tau$ ein Intervall. ϕ heißt bedingte Lösung der Bewegungsgleichungen* (WF) *auf dem Intervall J, wenn $\phi|_J\in\bigl(C^2(J)\bigr)^2$ gilt und die Gleichungen* (WF) *für jedes $t\in J$ erfüllt sind.*

6.2 Bemerkungen. 1. Die Definition ist sinnvoll, denn aufgrund der vorausgesetzten Eigenschaft von ϕ sind nach Korollar 4.7 die rechte Seite in (WF) für jedes $t\in\mathbb{R}$ und damit wegen $\phi|_J\in\bigl(C^2(J)\bigr)^2$ beide Seiten in (WF) für jedes $t\in J$ wohldefiniert.

2. Jede Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) im eigentlichen Sinne ist auch bedingte Lösung der Gleichungen (WF), und zwar auf jedem kompakten Intervall $J\subset\mathbb{R}$. Dies folgt aus der Definition 4.6 zusammen mit Satz 5.2.

3. Ist $\phi=(a,b)$ eine bedingte Lösung von (WF) auf J, so sind die Gleichungen (WF) zwar i.a. nur für $t\in J$ erfüllt, aber ϕ ist dennoch auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt. Hiermit wird die Existenz der Lichtkegelfunktionen l_1^-, l_1^+, l_2^- und l_2^+ gewährleistet. Da die Funktionswerte $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$ für $t\in J$ nicht auf das Intervall J beschränkt sind, tragen auch $\phi|_{]-\infty,\sigma]}$ und $\phi|_{[\tau,\infty[}$, d.h. der Verlauf von a und b außerhalb des Intervalls J, zur rechten Seite in (WF) bei. Die

Funktionenpaare $\phi|_{]-\infty,\sigma]}$ und $\phi|_{[\tau,\infty[}$ dienen gewissermaßen als Randbedingungen, denen die bedingte Lösung ϕ auf $J = [\sigma, \tau]$ unterworfen ist. Sie müssen mit der Eigenschaft $a - b > 0$ und $|\dot{a}|, |\dot{b}| \leq \omega$ für ein $\omega \in [0, 1[$ verträglich und stetig differenzierbar sein, unterliegen aber darüberhinaus keiner Einschränkung.

Der letzten Bemerkung zufolge wird man nach der Existenz bedingter Lösungen ϕ von (WF) auf $J = [\sigma, \tau]$ zu vorgegebenen $\phi|_{]-\infty,\sigma]}$ oder $\phi|_{[\tau,\infty[}$ fragen. Der folgende Satz besagt: für bestimmte Intervalle $J = [\sigma, \tau]$ existiert eine bedingte Lösung ϕ von (WF) auf J, so daß $\phi|_{]-\infty,\sigma]}$ den Asymptoten entspricht, gegen die nach Satz 5.4 eine Lösung von (WF) im Limes $t \to -\infty$ strebt. $\phi|_{[\tau,\infty[}$ setzt dabei $\phi|_J$ stetig differenzierbar durch Halbgeraden fort. Zu der Klasse von erlaubten Intervallen gehören insbesondere solche, die eine gegen $\mathbb{R}$ aufsteigende Folge bilden.

6.3 Satz. *Gegeben seien $x_{-\infty}, y_{-\infty}, u_{-\infty}, v_{-\infty} \in \mathbb{R}$ mit $-1 < u_{-\infty} < v_{-\infty} < 1$. Mit*

$$\eta_1 := \frac{\kappa_1\big(1 - u_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1 - v_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2}, \quad \eta_2 := \frac{\kappa_2\big(1 - v_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1 - u_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2} \tag{6.1}$$

setze man

$$\left.\begin{aligned} A_{-\infty}(t) &:= x_{-\infty} + u_{-\infty}t - \eta_1 \ln(-t), \\ B_{-\infty}(t) &:= y_{-\infty} + v_{-\infty}t + \eta_2 \ln(-t) \end{aligned}\right. \qquad (t < 0). \tag{6.2}$$

Es sei $J = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit

$$\sigma < -1, \quad A_{-\infty}(\sigma) > B_{-\infty}(\sigma), \quad -1 < \dot{A}_{-\infty}(\sigma) < \dot{B}_{-\infty}(\sigma) < 1 \tag{6.3}$$

und

$$\tau \geq \sigma + \frac{2\Big(x_{-\infty} - y_{-\infty} + (u_{-\infty} - v_{-\infty})\sigma\Big)^2}{\min\{\kappa_1, \kappa_2\}\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}}. \tag{6.4}$$

Dann existiert eine bedingte Lösung $\phi = (a, b)$ der Bewegungsgleichungen (WF) *auf dem Intervall J mit*

$$\begin{aligned} a(t) &= \begin{cases} A_{-\infty}(t) & t \leq \sigma \\ a(\tau) + \dot{a}(\tau)(t - \tau) & t \geq \tau, \end{cases} \\ b(t) &= \begin{cases} B_{-\infty}(t) & t \leq \sigma \\ b(\tau) + \dot{b}(\tau)(t - \tau) & t \geq \tau. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Für jedes $\omega \in [0,1[$ *mit*

$$\omega \geq \sqrt{1 - \frac{\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^3}{\Big(10 + \dfrac{8\max\{\kappa_1, \kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}\Big)^2}} \tag{6.6}$$

und jedes $\delta > 0$ *mit*

$$\delta \leq \frac{\kappa_1\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}}{12 + \dfrac{4\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}} \tag{6.7}$$

gilt

$$\left.\begin{aligned} |\dot a(t)|, |\dot b(t)| &\leq \omega < 1, \\ a(t) - b(t) &\geq \delta > 0 \end{aligned}\right\} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

Beweis. Zunächst sei unsere Beweisstrategie erläutert. Die Frage der Existenz einer bedingten Lösung wird als Fixpunktproblem formuliert. Wir führen einen Banach-Raum X stetig differenzierbarer Funktionenpaare auf J, eine offene und beschränkte Teilmenge Ω von X mit $0 \in \Omega$ und einen kompakten Operator H auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ ein, so daß die Existenz einer bedingten Lösung $\phi = (a,b)$ von (WF) auf J mit der Eigenschaft (6.5) äquivalent ist zur Existenz eines Fixpunktes von $H(1,\cdot)$ in $\overline{\Omega}$. Die Existenz eines Fixpunktes von $H(1,\cdot)$ zeigen wir mit Hilfe des Leray-Schauder-Grades, indem wir anhand geeigneter A-priori-Abschätzungen die Gültigkeit von $0 \notin \big(\mathrm{Id} - H(\lambda,\cdot)\big)(\partial\Omega)$ für jedes $\lambda \in [0,1]$ gewährleisten.

Bei der Anwendung des Abbildungsgrades auf unsere spezielle Problemstellung besteht folgende Besonderheit. Wir suchen eine bedingte Lösung $\phi = (a,b)$ von (WF) auf J mit der Eigenschaft (6.5), also ein auf ganz $\mathbb{R}$ erklärtes Funktionenpaar, das im Intervall $J = [\sigma,\tau]$ die Gleichungen (WF) löst und für $t \leq \sigma$ den fest vorgegebenen Verlauf (6.5) hat. Der Grundraum X, die Teilmenge $\Omega \subset X$ und der Operator H können nicht – wie es zunächst naheliegend erschiene – so gewählt werden, daß ein Fixpunkt von $H(1,\cdot)$ in $\overline{\Omega}$ ganz unmittelbar der Restriktion $\phi|_J$ einer solchen bedingten Lösung auf das Intervall J entspricht. Hierzu müßten nämlich alle Elemente φ von Ω bei der Intervallgrenze σ stetig an (6.5) anschließen, so wie dies auch die Restriktion $\phi|_J$ einer bedingten Lösung ϕ täte. Denn würde ein $\varphi \in \Omega$ bei σ nicht stetig an (6.5) anschließen, so wäre für das aus φ und (6.5) zusammengesetzte, auf ganz $\mathbb{R}$ erklärte und bei σ unstetige Funktionenpaar die rechte Seite in (WF) nicht wohldefiniert und damit $H(1,\varphi)$ gar nicht erklärt. Schließen aber alle $\varphi \in \Omega$ bei σ stetig an (6.5) an, haben also alle $\varphi \in \Omega$ bei σ denselben Funktionswert, so ist Ω nicht, wie es die Definition des Abbildungsgrades verlangt, offen in X. Die Anschlußbedingungen schon im Grundraum X zu implementieren, scheitert daran, daß X linear sein sollte.

Um das geschilderte Problem zu umgehen und den Abbildungsgrad dennoch anzuwenden, gehen wir folgendermaßen vor. Wir verlangen von den Elementen des Raumes X, daß Funktionswert und erste Ableitung bei σ gleich Null sind. Dies ist mit der Linearität von X vereinbar. Sodann konstruieren wir ein bestimmtes Referenzfunktionenpaar $\phi_0 = (a_0, b_0)$ auf J, welches bei σ stetig an (6.5) anschließt, und definieren geeignet die offene Teilmenge Ω von X. Die entsprechende Eigenschaft von X erlaubt es jetzt, daß Ω offen in X ist, obwohl Funktionswert und erste Ableitung bei σ für jedes $\varphi \in \Omega$ gleich Null sind. Letzteres bedeutet aber, daß $\phi_0 + \varphi$ bei σ für jedes $\varphi \in \Omega$ stetig an (6.5) anschließt. Zudem ist durch die geeignete Wahl von Ω für das aus $\phi_0 + \varphi$ und (6.5) zusammengesetzte, auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionenpaar die rechte Seite in (WF) wohldefiniert. Nun wählen wir den Operator H auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ derart, daß folgender Zusammenhang besteht: ϕ ist genau dann Fixpunkt von $H(1,\cdot)$, wenn $\phi_0 + \varphi$ die Restriktion $\phi|_{[\sigma,\tau]}$ einer bedingten Lösung ϕ von (WF) auf J mit der Eigenschaft (6.5) ist. Das Referenzfunktionenpaar $\phi_0 = (a_0, b_0)$ dient also dazu, den Leray-Schauder-Grad auf unsere Problemstellung anwendbar zu machen. Dabei stellt es gemäß $\phi|_{[\sigma,\tau]} = \phi_0 + \varphi$ den Zusammenhang her zwischen einem Fixpunkt ϕ von $H(1,\cdot)$ und einer bedingten Lösung ϕ von (WF) auf $J = [\sigma, \tau]$ mit der Eigenschaft (6.5).

Wir definieren als erstes

$$X := \left\{ \varphi = (\alpha, \beta) \in \left(C^1(J)\right)^2 \,\middle|\, \alpha(\sigma) = \dot{\alpha}(\sigma) = \beta(\sigma) = \dot{\beta}(\sigma) = 0 \right\} \tag{6.9}$$

und versehen den linearen Raum X gemäß

$$\|\varphi\|_X := \|\alpha\| + \|\beta\| + \|\dot{\alpha}\| + \|\dot{\beta}\| \quad \text{für alle } \varphi = (\alpha, \beta) \in X$$

mit der Norm $\|\cdot\|_X$, wobei $\|\cdot\|$ hier und im folgenden immer die Supremumsnorm auf $C(J)$ bezeichnet. Bezüglich der Norm $\|\cdot\|_X$ ist X ein reeller Banach-Raum.

Als nächstes konstruieren wir ein Funktionenpaar $\phi_0 = (a_0, b_0) \in \left(C^2(J)\right)^2$, mit dessen Hilfe wir anschließend eine Menge $\Omega \subset X$ und einen Operator H auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ definieren werden. Ausgehend von

$$\widehat{\sigma} := \sigma + \min \left\{ \frac{\tau - \sigma}{2}, \frac{A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}{-2\left(\dot{A}_{\infty}(\sigma) - \dot{B}_{-\infty}(\sigma)\right)} \right\}$$

und einer Glättungsfunktion $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{gathered} \operatorname{supp} g = \left[-\frac{1}{4}(\widehat{\sigma} - \sigma), \frac{1}{4}(\widehat{\sigma} - \sigma) \right], \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1, \quad 0 \le g(x) \le g(0), \quad g(x) = g(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{gathered} \tag{6.10}$$

setzen wir

$$\begin{aligned} a_0(t) &:= A_{-\infty}(\sigma) + \dot{A}_{-\infty}(\sigma)(t-\sigma) \\ &\qquad + \big(|\dot{A}_{-\infty}(\sigma)| - \dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big) \int_\sigma^t \int_\sigma^y g(x-\widehat{\sigma})dxdy, \\ b_0(t) &:= B_{-\infty}(\sigma) + \dot{B}_{-\infty}(\sigma)(t-\sigma) \\ &\qquad - \big(|\dot{B}_{-\infty}(\sigma)| + \dot{B}_{-\infty}(\sigma)\big) \int_\sigma^t \int_\sigma^y g(x-\widehat{\sigma})dxdy. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Wir stellen die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen a_0 und b_0 zusammen:

(a)
$$\begin{aligned} a_0(\sigma) &= A_{-\infty}(\sigma), \quad \dot{a}_0(\sigma) = \dot{A}_{-\infty}(\sigma), \\ b_0(\sigma) &= B_{-\infty}(\sigma), \quad \dot{b}_0(\sigma) = \dot{B}_{-\infty}(\sigma). \end{aligned} \tag{6.12}$$

(b) Für alle $t \in J$ gilt

$$|\dot{a}_0(t)|, |\dot{b}_0(t)| \le \omega_0 < 1, \quad \omega_0 := \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}. \tag{6.13}$$

(c) Für alle $t \in J$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le \ddot{a}_0(t) \le \big(|\dot{A}_{-\infty}(\sigma)| - \dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)g(0) < 2g(0), \\ 0 &\ge \ddot{b}_0(t) \ge -\big(|\dot{B}_{-\infty}(\sigma)| + \dot{B}_{-\infty}(\sigma)\big)g(0) > -2g(0). \end{aligned} \tag{6.14}$$

(d)
$$\dot{a}_0(\tau) - \dot{b}_0(\tau) = |\dot{A}_{-\infty}(\sigma)| + |\dot{B}_{-\infty}(\sigma)| > 0. \tag{6.15}$$

(e) Für alle $t \in J$ gilt

$$a_0(t) - b_0(t) \ge \delta_0 > 0, \quad \delta_0 := \frac{1}{2}\big(A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)\big). \tag{6.16}$$

Die Eigenschaft (a) folgt unmittelbar aus der Definition von a_0 und b_0. Zum Beweis von (b) betrachte man

$$\dot{a}_0(t) = \dot{A}_{-\infty}(\sigma) + \big(|\dot{A}_{-\infty}(\sigma)| - \dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big) \int_\sigma^t g(x-\widehat{\sigma})dx \quad (t \in J).$$

Aus (6.10) folgt

$$\dot{A}_{-\infty}(\sigma) \le \dot{a}_0(t) \le |\dot{A}_{-\infty}(\sigma)|,$$

d.h. es gilt $|\dot{a}_0(t)| \le |\dot{A}_{-\infty}(\sigma)|$ für alle $t \in J$. Ebenso gilt $|\dot{b}_0(t)| \le |\dot{B}_{-\infty}(\sigma)|$ und damit

$$|\dot{a}_0(t)|, |\dot{b}_0(t)| \le \max\big\{|\dot{A}_{-\infty}(\sigma)|, |\dot{B}_{-\infty}(\sigma)|\big\} \qquad (t \in J). \tag{6.17}$$

Gemäß (6.2) gilt weiter

$$\dot{A}_{-\infty}(t) = u_{-\infty} + \eta_1 \frac{1}{|t|}, \quad \dot{B}_{-\infty}(t) = v_{-\infty} - \eta_2 \frac{1}{|t|} \qquad (t < 0)$$

und demnach wegen der Voraussetzung (6.3)

$$u_{-\infty} < \dot{A}_{-\infty}(t) \le \dot{A}_{-\infty}(\sigma) < \dot{B}_{-\infty}(\sigma) \le \dot{B}_{-\infty}(t) < v_{-\infty} \qquad (t \le \sigma),$$

insbesondere also

$$|\dot{A}_{-\infty}(t)|, |\dot{B}_{-\infty}(t)| < \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\} = \omega_0 \qquad (t \le \sigma). \tag{6.18}$$

Zusammen mit (6.17) folgt hieraus (6.13). Die Eigenschaften (c) und (d) folgen wieder unmittelbar aus der Definition von a_0 und b_0 sowie (6.10). Am aufwendigsten ist der Beweis von (e). Es sei $t \in J$ beliebig, aber fest. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
&a_0(t) - b_0(t)\\
&= A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + \big(\dot{A}_{-\infty}(\sigma) - \dot{B}_{-\infty}(\sigma)\big)(\widehat{\sigma} - \sigma)\\
&\quad -\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma) - \dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)(t - \widehat{\sigma})\\
&\quad +\Big(|\dot{A}_{-\infty}(\sigma)| - \dot{A}_{-\infty}(\sigma) + |\dot{B}_{-\infty}(\sigma)| + \dot{B}_{-\infty}(\sigma)\Big) \int\limits_{\sigma}^{t} \int\limits_{\sigma}^{y} g(x - \widehat{\sigma})\,dx dy\\
&\ge A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + \big(\dot{A}_{-\infty}(\sigma) - \dot{B}_{-\infty}(\sigma)\big)(\widehat{\sigma} - \sigma)\\
&\quad -\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma) - \dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)(t - \widehat{\sigma})\\
&\quad +\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma) - \dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big) \int\limits_{\sigma}^{t} \int\limits_{\sigma}^{y} g(x - \widehat{\sigma})\,dx dy.
\end{aligned}$$

Der Definition von $\widehat{\sigma}$ gemäß folgt

$$\begin{aligned}
&a_0(t) - b_0(t)\\
&\ge \frac{1}{2}\big(A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma)-\dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)(t-\widehat{\sigma})\\
&\quad +\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma)-\dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)\int_\sigma^t\int_\sigma^y g(x-\widehat{\sigma})dxdy\\
&=\frac{1}{2}\big(A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)\big)\\
&\quad +\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma)-\dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)\\
&\qquad\times\left(-(t-\widehat{\sigma})+\int_\sigma^t\left[\left(\frac{d}{dy}(y-\widehat{\sigma})\right)\int_\sigma^y g(x-\widehat{\sigma})dx\right]dy\right),
\end{aligned}
$$

und daraus mit Hilfe partieller Integration

$$
\begin{aligned}
&a_0(t)-b_0(t)\\
&\geq\frac{1}{2}\big(A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)\big)\\
&\quad +\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma)-\dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)\\
&\qquad\times\left(-(t-\widehat{\sigma})+(t-\widehat{\sigma})\int_\sigma^t g(x-\widehat{\sigma})dx-\int_\sigma^t(x-\widehat{\sigma})g(x-\widehat{\sigma})dx\right).
\end{aligned}
$$

Nun beachten wir, daß wegen (6.10)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}&\left(-(t-\widehat{\sigma})+(t-\widehat{\sigma})\int_\sigma^t g(x-\widehat{\sigma})dx-\int_\sigma^t(x-\widehat{\sigma})g(x-\widehat{\sigma})dx\right)\\
&=-1+\int_\sigma^t g(x-\widehat{\sigma})dx\\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

gilt, d.h. der Term fällt monoton und nimmt in $J=[\sigma,\tau]$ sein Minimum bei $t=\tau$ an. Es folgt demnach

$$
\begin{aligned}
&a_0(t)-b_0(t)\\
&\geq\frac{1}{2}\big(A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)\big)\\
&\quad +\big(\dot{B}_{-\infty}(\sigma)-\dot{A}_{-\infty}(\sigma)\big)
\end{aligned}
$$

$$\times\left(-(\tau-\widehat{\sigma})+(\tau-\widehat{\sigma})\int\limits_{\sigma}^{\tau} g(x-\widehat{\sigma})dx-\int\limits_{\sigma}^{\tau}(x-\widehat{\sigma})g(x-\widehat{\sigma})dx\right).$$

Aufgrund der Eigenschaften (6.10) von g, insbesondere $\operatorname{supp} g \subset [\sigma,\tau]$, verschwindet der letzte Term. Wir erhalten also schließlich

$$a_0(t)-b_0(t)\geq \frac{1}{2}\big(A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)\big),$$

und damit ist (e) gezeigt.

Wir wollen an dieser Stelle kurz die spezielle Definition (6.11) von $\phi_0 = (a_0, b_0)$ veranschaulichen. Die Funktionen a_0 und b_0 lassen sich nämlich auch in der Form

$$a_0(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{a}_0(x)g(t-x)\,dx,\quad b_0(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{b}_0(x)g(t-x)\,dx\qquad (t\in J)$$

darstellen, mit

$$\widetilde{a}_0(t):=\begin{cases}A_{-\infty}(\sigma)+\dot{A}_{-\infty}(\sigma)(t-\sigma) & t\leq\widehat{\sigma}\\ A_{-\infty}(\sigma)+\dot{A}_{-\infty}(\sigma)(\widehat{\sigma}-\sigma)+|\dot{A}_{-\infty}(\sigma)|(t-\widehat{\sigma}) & t>\widehat{\sigma},\end{cases}$$

$$\widetilde{b}_0(t):=\begin{cases}B_{-\infty}(\sigma)+\dot{B}_{-\infty}(\sigma)(t-\sigma) & t\leq\widehat{\sigma}\\ B_{-\infty}(\sigma)+\dot{B}_{-\infty}(\sigma)(\widehat{\sigma}-\sigma)-|\dot{B}_{-\infty}(\sigma)|(t-\widehat{\sigma}) & t>\widehat{\sigma}.\end{cases}$$

Wir machen zwar von dieser Darstellung im folgenden keinen Gebrauch (und verzichten daher auf ihren Beweis, den man mit Hilfe partieller Integration und den Eigenschaften von g unschwer führt), aber sie läßt leichter erkennen, wie a_0 und b_0 konstruiert sind. a_0 und b_0 gehen durch Glättung aus $\widetilde{a}_0$ und $\widetilde{b}_0$ hervor. Die Glättung in einer kleinen, durch den Träger von g bestimmten und nicht über J hinausragenden Umgebung von $\widehat{\sigma}\in\,]\sigma,\tau[$ dient allein dazu, daß a_0 und b_0 im Gegensatz zu $\widetilde{a}_0$ und $\widetilde{b}_0$ bei $\widehat{\sigma}$ differenzierbar sind. Davon abgesehen ist das für unsere Zwecke wichtige qualitative Verhalten von a_0 und b_0, insbesondere die Eigenschaften (a), (b), (d) und (e), bereits bei $\widetilde{a}_0$ und $\widetilde{b}_0$ vorhanden.

Mit Hilfe von $\phi_0 = (a_0, b_0)$ als Referenzfunktionenpaar ordnen wir fortan stets jedem Element $\varphi = (\alpha,\beta)$ aus X ein Funktionenpaar $\phi = (a, b) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ zu, und zwar auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
a(t) &:= \begin{cases} A_{-\infty}(t) & t < \sigma \\ a_0(t) + \alpha(t) & t \in J \\ a_0(\tau) + \alpha(\tau) + \big(\dot{a}_0(\tau) + \dot{\alpha}(\tau)\big)(t - \tau) & t > \tau, \end{cases} \\
b(t) &:= \begin{cases} B_{-\infty}(t) & t < \sigma \\ b_0(t) + \beta(t) & t \in J \\ b_0(\tau) + \beta(\tau) + \big(\dot{b}_0(\tau) + \dot{\beta}(\tau)\big)(t - \tau) & t > \tau. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Aufgrund der Eigenschaft (6.12) von $\phi_0 = (a_0, b_0)$ und gemäß der Definition (6.9) von X sind a und b in der Tat auf ganz $\mathbb{R}$, insbesondere also bei σ, stetig differenzierbar. Die Zuordnung (6.19) rechtfertigt unsere Terminologie, $\phi_0 = (a_0, b_0)$ als Referenzfunktionenpaar zu bezeichnen. Für jedes $\varphi = (\alpha, \beta)$ werden α und β auf J immer in Bezug zu a_0 und b_0 gestellt. Linksseitig des Intervalles J werden $a_0+\alpha$ und $b_0 + \beta$ durch die festen Funktionen $A_{-\infty}$ und $B_{-\infty}$ fortgesetzt, und rechtsseitig durch Geraden. So entstehen a und b auf $\mathbb{R}$, und diese sind gegenüber α und β auf J die eigentlich relevanten Funktionen. Wir werden im weiteren Verlauf des Beweises ständig von der Zuordnung (6.19) Gebrauch machen.

Ausgehend von Konstanten $\overline{\omega}, \overline{\delta}, \overline{\zeta} \in \mathbb{R}$, welche der Voraussetzung

$$\omega_0 < \overline{\omega} < 1, \quad 0 < \overline{\delta} < \delta_0, \quad \overline{\zeta} > 2g(0) \tag{6.20}$$

genügen sollen, betrachten wir Elemente $\varphi = (\alpha, \beta)$ von X mit folgenden Eigenschaften $(\Omega1)$–$(\Omega4)$:

$(\Omega1)$ Für alle $t \in J$ gilt

$$|\dot{a}_0(t) + \dot{\alpha}(t)|, |\dot{b}_0(t) + \dot{\beta}(t)| < \overline{\omega}.$$

$(\Omega2)$ Für alle $t \in J$ gilt

$$\big(a_0(t) + \alpha(t)\big) - \big(b_0(t) + \beta(t)\big) > \overline{\delta}.$$

$(\Omega3)$

$$\big(\dot{a}_0(\tau) + \dot{\alpha}(\tau)\big) - \big(\dot{b}_0(\tau) + \dot{\beta}(\tau)\big) > 0.$$

$(\Omega4)$ Für alle $t_1, t_2 \in J$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt

$$\frac{\big|\big(\dot{a}_0(t_2) + \dot{\alpha}(t_2)\big) - \big(\dot{a}_0(t_1) + \dot{\alpha}(t_1)\big)\big|}{|t_2 - t_1|} < \overline{\zeta},$$

$$\frac{\big|\big(\dot{b}_0(t_2) + \dot{\beta}(t_2)\big) - \big(\dot{b}_0(t_1) + \dot{\beta}(t_1)\big)\big|}{|t_2 - t_1|} < \overline{\zeta}.$$

Wir definieren

$$\Omega := \Big\{ \varphi = (\alpha, \beta) \in X \;\Big|\; \varphi \text{ hat die Eigenschaften } (\Omega 1)\text{–}(\Omega 4) \Big\}.$$

Ω ist eine offene, beschränkte Teilmenge von X. Aufgrund der Eigenschaften (b), (d) und (e) von a_0 und b_0 sowie der Voraussetzung (6.20) an $\overline{\omega}$, $\overline{\delta}$ und $\overline{\zeta}$ gilt $0 \in \Omega$ (d.h. Ω enthält den Nullvektor des linearen Raumes X).

Mit Hilfe der Zuordnung (6.19) können wir die Eigenschaften (Ω1)–(Ω4) auch auf folgende äquivalente Weise formulieren:

$$(\Omega 1) \qquad |\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < \overline{\omega} \qquad (t \in J). \tag{6.21}$$

$$(\Omega 2) \qquad a(t) - b(t) > \overline{\delta} \qquad (t \in J). \tag{6.22}$$

$$(\Omega 3) \qquad \dot{a}(\tau) - \dot{b}(\tau) > 0. \tag{6.23}$$

$$(\Omega 4) \qquad \frac{\big|\dot{a}(t_2) - \dot{a}(t_1)\big|}{|t_2 - t_1|}, \frac{\big|\dot{b}(t_2) - \dot{b}(t_1)\big|}{|t_2 - t_1|} < \overline{\zeta} \qquad (t_1, t_2 \in J,\ t_1 \neq t_2). \tag{6.24}$$

Ein $\varphi = (\alpha, \beta)$ aus X ist also genau dann Element von Ω, wenn die gemäß (6.19) zugehörigen Funktionen a und b die Eigenschaften (6.21)–(6.24) besitzen. Ähnlich wie hier werden wir des öfteren Eigenschaften von α und β unmittelbar durch diejenigen von a und b ausdrücken.

Es sei nun $\phi = (a, b)$ ein Funktionenpaar, welches der Vorschrift (6.19) gemäß aus einem Element $\varphi = (\alpha, \beta)$ von $\overline{\Omega}$ hervorgeht. Wegen $\varphi \in \overline{\Omega}$, (6.21) und (6.22) gilt

$$\left.\begin{aligned} |\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| &\leq \overline{\omega} < 1, \\ a(t) - b(t) &\geq \overline{\delta} > 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{für alle } t \in J. \tag{6.25}$$

Wir zeigen, daß diese Abschätzungen nicht auf das Intervall J beschränkt sind, sondern daß sogar

$$\left.\begin{aligned} |\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| &\leq \overline{\omega} < 1, \\ a(t) - b(t) &\geq \overline{\delta} > 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \tag{6.26}$$

gilt und damit ϕ den Voraussetzungen in Korollar 4.7 genügt. Hierzu verwenden wir

$$|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \leq \max \Big\{ |u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|, \sup_{s \in J} |\dot{a}(s)|, \sup_{s \in J} |\dot{b}(s)| \Big\} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{6.27}$$

sowie

$$a(t) - b(t) \geq \inf_{s \in J} \big(a(s) - b(s) \big) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{6.28}$$

Ersteres folgt aus (6.19) zusammen mit (6.18) und (6.20). Zum Beweis der zweiten Ungleichung benutzen wir

$$\ddot{A}_{-\infty}(t) = \eta_1 \frac{1}{t^2} > 0, \quad \ddot{B}_{-\infty}(t) = -\eta_2 \frac{1}{t^2} < 0 \qquad (t < 0),$$

woraus mit der Voraussetzung (6.3) und (6.19)

$$\dot{a}(t) - \dot{b}(t) < 0 \qquad (t \leq \sigma) \tag{6.29}$$

folgt. Wegen $\varphi \in \overline{\Omega}$, (6.23) und (6.3) gilt zudem

$$\dot{a}(t) - \dot{b}(t) \geq 0 \qquad (t \geq \tau),$$

und gemeinsam mit (6.29) hat dies (6.28) zur Folge. Anhand der Ungleichungen (6.27) und (6.28) können wir von (6.25) auf (6.26) schließen, denn gemäß (6.20) und (6.13) gilt $\overline{\omega} > \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}$. Damit ist (6.26) gezeigt.

Jedes $\phi = (a, b)$, das über die Vorschrift (6.19) einem $\varphi = (\alpha, \beta) \in \overline{\Omega}$ zugeordnet ist, genügt also den Abschätzungen (6.26). Nach Korollar 4.7 sind daher für ein solches $\phi = (a, b)$ die rechte Seite in (WF) bzw. die Ausdrücke

$$\begin{aligned} F_1^{\varphi}(t) &:= \frac{1 + \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)}{1 - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)} \frac{1}{\Big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} + \frac{1 - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}{1 + \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)} \frac{1}{\Big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}, \\ F_2^{\varphi}(t) &:= \frac{1 - \dot{a}\big(l_2^-(t)\big)}{1 + \dot{a}\big(l_2^-(t)\big)} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(t)\big) - b(t)\Big)^2} + \frac{1 + \dot{a}\big(l_2^+(t)\big)}{1 - \dot{a}\big(l_2^+(t)\big)} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(t)\big) - b(t)\Big)^2} \end{aligned} \tag{6.30}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, mit $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$ gemäß (4.22). Dieser Sachverhalt erlaubt es, in der folgenden Weise einen Operator H auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ zu erklären:

$$\begin{aligned} H\colon [0,1] \times \overline{\Omega} &\to X \\ (\lambda, \varphi) &\mapsto H(\lambda, \varphi) = \big(H_1(\lambda, \varphi), H_2(\lambda, \varphi)\big), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} H_1(\lambda, \varphi)(t) &:= -a_0(t) + A_{-\infty}(\sigma) + \int_\sigma^t \frac{P_1^{\lambda,\varphi}(s)}{\sqrt{1 + P_1^{\lambda,\varphi}(s)^2}} ds \\ H_2(\lambda, \varphi)(t) &:= -b_0(t) + B_{-\infty}(\sigma) + \int_\sigma^t \frac{P_2^{\lambda,\varphi}(s)}{\sqrt{1 + P_2^{\lambda,\varphi}(s)^2}} ds \end{aligned} \tag{6.31}$$

und

$$
\begin{aligned}
P_1^{\lambda,\varphi}(t) &:= (1-\lambda)\frac{\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}} + \lambda\frac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}} + \lambda\int_\sigma^t \frac{1}{2}\kappa_1 F_1^\varphi(s)ds \\
P_2^{\lambda,\varphi}(t) &:= (1-\lambda)\frac{\dot b_0(t)}{\sqrt{1-\dot b_0(t)^2}} + \lambda\frac{\dot B_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot B_{-\infty}(\sigma)^2}} - \lambda\int_\sigma^t \frac{1}{2}\kappa_2 F_2^\varphi(s)ds
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

für alle $t \in J$. Es sei bemerkt, daß die in der Definition von $H_i(\lambda,\varphi)$ bzw. F_i^φ $(i = 1, 2)$ auftretenden Funktionen $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ mittels der Vorschrift (6.19) aus $\varphi = (\alpha, \beta) \in \overline{\Omega}$ gebildet werden und H insofern tatsächlich auf $[0,1] \times \overline{\Omega}$ erklärt ist. Man beachte weiterhin, daß für jedes $(\lambda,\varphi) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$ gemäß (6.12) und (6.32)

$$
\begin{aligned}
H_1(\lambda,\varphi)(\sigma) &= -a_0(\sigma) + A_{-\infty}(\sigma) = 0, \\
\dot H_1(\lambda,\varphi)(\sigma) &= -\dot a_0(\sigma) + \frac{P_1^{\lambda,\varphi}(\sigma)}{\sqrt{1+P_1^{\lambda,\varphi}(\sigma)^2}} \\
&= -\dot A_{-\infty}(\sigma) + \frac{\dfrac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}}\right)^2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

und ebenso

$$H_2(\lambda,\varphi)(\sigma) = 0, \quad \dot H_2(\lambda,\varphi)(\sigma) = 0$$

gilt, d.h. H bildet in der Tat $[0,1] \times \overline{\Omega}$ nach X ab.

Der gemäß (6.30)–(6.32) definierte Operator H auf $[0,1]\times\overline{\Omega}$ ist genau unserer Problemstellung angepaßt. Um dies zu verdeutlichen, nehmen wir vorübergehend an, daß ein $\varphi = (\alpha, \beta) \in \overline{\Omega}$ Fixpunkt von $H(1,\cdot)$ ist. Das Funktionenpaar $\phi = (a, b)$, welches der Vorschrift (6.19) gemäß aus φ hervorgeht, genügt dann wegen

$$H_1(\lambda,\varphi)(t) = \alpha(t), \qquad H_2(\lambda,\varphi)(t) = \beta(t) \qquad (t \in J)$$

und

$$a(t) = \alpha(t) + a_0(t), \qquad b(t) = \beta(t) + b_0(t) \qquad (t \in J)$$

gemäß (6.31) für alle $t \in J$ den Gleichungen

$$a(t) = A_{-\infty}(\sigma) + \int_\sigma^t \frac{P_1^{\lambda,\varphi}(s)}{\sqrt{1 + P_1^{\lambda,\varphi}(s)^2}} ds$$

$$b(t) = B_{-\infty}(\sigma) + \int_\sigma^t \frac{P_2^{\lambda,\varphi}(s)}{\sqrt{1 + P_2^{\lambda,\varphi}(s)^2}} ds.$$

Differentiation nach t ergibt

$$\dot{a}(t) = \frac{P_1^{\lambda,\varphi}(t)}{\sqrt{1 + P_1^{\lambda,\varphi}(t)^2}}, \quad \dot{b}(t) = \frac{P_2^{\lambda,\varphi}(t)}{\sqrt{1 + P_2^{\lambda,\varphi}(t)^2}} \tag{6.33}$$

und damit

$$\frac{\dot{a}(t)}{\sqrt{1 - \dot{a}(t)^2}} = P_1^{\lambda,\varphi}(t), \quad \frac{\dot{b}(t)}{\sqrt{1 - \dot{b}(t)^2}} = P_2^{\lambda,\varphi}(t) \tag{6.34}$$

für alle $t \in J$. Da $P_1^{\lambda,\varphi}$ und $P_2^{\lambda,\varphi}$ gemäß (6.32) differenzierbar in J sind, besagt (6.33), daß gleiches auch für $\dot{a}$ und $\dot{b}$ in J zutrifft. Aus (6.34) und (6.32) mit $\lambda = 1$ ergibt sich durch erneute Differentiation nach t

$$\frac{\ddot{a}(t)}{\big(1 - \dot{a}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\kappa_1 F_1^{\varphi}(t), \quad \frac{\ddot{b}(t)}{\big(1 - \dot{b}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\kappa_2 F_2^{\varphi}(t) \tag{6.35}$$

für alle $t \in J$. Der Definition (6.30) von $F_1^{\varphi}(t)$ und $F_2^{\varphi}(t)$ zufolge bedeutet dies aber gerade, daß im Intervall J die Bewegungsgleichungen (WF) erfüllt sind. Wenn also ein $\varphi \in \overline{\Omega}$ Fixpunkt von $H(1,\cdot)$ ist, so handelt es sich bei dem zugehörigen, durch (6.19) gegebenen Funktionenpaar $\phi = (a, b)$ um eine bedingte Lösung von (WF) auf J mit der Eigenschaft (6.5). Anhand von (6.19) und der Definition (6.30)–(6.32) von H sei nochmals darauf hingewiesen, wie das Referenzfunktionenpaar $\phi_0 = (a_0, b_0)$ den Zusammenhang zwischen dieser bedingten Lösung ϕ und dem entsprechenden Fixpunkt φ von $H(1,\cdot)$ herstellt.

Unsere Aufgabe besteht also darin, die Existenz eines Fixpunktes von $H(1,\cdot)$ in $\overline{\Omega}$ nachzuweisen. Wir nehmen nun an dieser Stelle vorweg, daß der Operator H die folgenden Eigenschaften besitzt: H ist kompakt, und für jedes $\lambda \in [0,1]$ gilt $0 \notin \big(\mathrm{Id} - H(\lambda,\cdot)\big)(\partial\Omega)$. Unter Verwendung dieser Eigenschaften von H führen wir zunächst den Existenzbeweis zu Ende. Den Beweis der beiden Eigenschaften tragen wir dann anschließend nach.

Es sei

$$D\colon M \to \mathbb{Z}$$

mit

$$M = \Big\{ \big(\mathrm{Id} - G, \Delta, q\big) \;\Big|\; \Delta \subset X \text{ offen und beschränkt}, \; G\colon \overline{\Delta} \to X \text{ kompakt}, \\ q \in X \text{ mit } q \notin (\mathrm{Id} - G)(\partial\Delta) \Big\}$$

der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad (vgl. [16]). Wir beweisen anhand der Eigenschaften von D, daß $H(1,\cdot)$ einen Fixpunkt in Ω besitzt. Für die offene und beschränkte Teilmenge Ω von X gilt wegen $0 \in \Omega$

$$D(\mathrm{Id}, \Omega, 0) = 1.$$

Des weiteren ist der Operator $H\colon [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ eine kompakte Homotopie mit $0 \notin \big(\mathrm{Id} - H(\lambda,\cdot)\big)(\partial\Omega)$ für jedes $\lambda \in [0,1]$. Aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades gilt also

$$D\big(\mathrm{Id} - H(1,\cdot), \Omega, 0\big) = D\big(\mathrm{Id} - H(0,\cdot), \Omega, 0\big) = D(\mathrm{Id}, \Omega, 0) = 1.$$

Hierbei haben wir verwendet, daß der Operator $H(0,\cdot)$ gleich der Nullabbildung ist. Gemäß (6.31) und (6.32) mit $\lambda = 0$ gilt nämlich

$$H_1(0,\varphi)(t) \;=\; -a_0(t) + A_{-\infty}(\sigma) + \int_\sigma^t \dot{a}_0(s)ds = 0,$$

$$H_2(0,\varphi)(t) \;=\; -b_0(t) + B_{-\infty}(\sigma) + \int_\sigma^t \dot{b}_0(s)ds = 0$$

für alle $\varphi \in \overline{\Omega}$ und $t \in J$. Aus $D\big(\mathrm{Id} - H(1,\cdot), \Omega, 0\big) = 1$ folgt schließlich

$$\big(\mathrm{Id} - H(1,\cdot)\big)^{-1}(0) \neq \emptyset,$$

d.h. $H(1,\cdot)$ besitzt einen Fixpunkt in Ω.

Die Existenz eines Fixpunktes $\varphi = (\alpha,\beta) \in \Omega$ von $H(1,\cdot)$ bedeutet aber: das Funktionenpaar $\phi = (a,b)$, welches der Vorschrift (6.19) gemäß aus φ hervorgeht, genügt für jedes $t \in J$ den Gleichungen (6.35) mit $F_1^\varphi(t)$ und $F_2^\varphi(t)$ gemäß (6.30), d.h. ϕ ist bedingte Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) auf J und hat zudem die Eigenschaft (6.5). Damit ist die Existenzaussage des Satzes bewiesen.

Wir müssen jetzt noch den Beweis nachtragen, daß der Operator H kompakt ist und daß $0 \notin \big(\mathrm{Id} - H(\lambda,\cdot)\big)(\partial\Omega)$ für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt. Beim Beweis der zweiten Eigenschaft wird sich auch die Gültigkeit der im Satz behaupteten Abschätzungen (6.6)–(6.8) ergeben.

Wir beginnen mit dem Beweis der Kompaktheit von H und zeigen hierzu als erstes, daß H stetig ist. Für beliebige $(\lambda, \varphi), (\widetilde{\lambda}, \widetilde{\varphi}) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$ gilt gemäß (6.31) und dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}\left|\dot{H}_1(\lambda,\varphi)(t) - \dot{H}_1(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})(t)\right| &= \left|\frac{P_1^{\lambda,\varphi}(t)}{\sqrt{1+P_1^{\lambda,\varphi}(t)^2}} - \frac{P_1^{\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}}(t)}{\sqrt{1+P_1^{\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}}(t)^2}}\right| \\ &\leq \left|P_1^{\lambda,\varphi}(t) - P_1^{\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}}(t)\right|\end{aligned}$$

für alle $t \in J$. Mit (6.32), (6.13) und (6.18) folgt

$$\begin{aligned}&\left|\dot{H}_1(\lambda,\varphi)(t) - \dot{H}_1(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})(t)\right| \\ &\quad\leq \frac{|\dot{a}_0(t)|}{\sqrt{1-\dot{a}_0(t)^2}}|\lambda-\widetilde{\lambda}| + \frac{|\dot{A}_\infty(\sigma)|}{\sqrt{1-\dot{A}_\infty(\sigma)^2}}|\lambda-\widetilde{\lambda}| \\ &\qquad+|\lambda-\widetilde{\lambda}|\int_\sigma^t \frac{1}{2}\kappa_1\left|F_1^\varphi(s)\right|ds + |\lambda|\int_\sigma^t \frac{1}{2}\kappa_1\left|F_1^\varphi(s) - F_1^{\widetilde{\varphi}}(s)\right|ds \qquad (6.36) \\ &\quad\leq \frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}|\lambda-\widetilde{\lambda}| \\ &\qquad+\frac{1}{2}\kappa_1(\tau-\sigma)\left\|F_1^\varphi\right\||\lambda-\widetilde{\lambda}| + \frac{1}{2}\kappa_1(\tau-\sigma)\left\|F_1^\varphi - F_1^{\widetilde{\varphi}}\right\|\end{aligned}$$

für alle $t \in J$. Nun schätzen wir $\left\|F_1^\varphi\right\|$ und $\left\|F_1^\varphi - F_1^{\widetilde{\varphi}}\right\|$ ab. Gemäß Hilfssatz 5.1 und (6.26) gilt

$$a(t) - b\big(l_1^-(t)\big) > \frac{a(t)-b(t)}{2} \geq \frac{1}{2}\overline{\delta}, \quad a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) > \frac{a(t)-b(t)}{2} \geq \frac{1}{2}\overline{\delta} \qquad (6.37)$$

für alle $t \in J$. Gemeinsam mit (6.26) erhalten wir also aus (6.30)

$$\begin{aligned}\left|F_1^\varphi(t)\right| &< \frac{1+\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)}\frac{4}{\overline{\delta}^2} + \frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}\frac{4}{\overline{\delta}^2} \\ &< \frac{2}{1-\overline{\omega}}\frac{4}{\overline{\delta}^2} + \frac{2}{1-\overline{\omega}}\frac{4}{\overline{\delta}^2}\end{aligned}$$

für alle $t \in J$ und daher

$$\left\|F_1^\varphi\right\| < \frac{16}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2}. \qquad (6.38)$$

Aus (6.30) folgt weiter durch Anwendung des Mittelwertsatzes zusammen mit (6.26) und (6.37)

$$
\begin{aligned}
\left|F_1^{\varphi}(t) - F_1^{\widetilde{\varphi}}(t)\right| < \quad & \frac{32}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^3}\Big(|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big|\Big) \\
& + \frac{32}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^3}\Big(|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big|\Big) \\
& + \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\big|\dot{b}\big(l_1^-(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \\
& + \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\big|\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big|
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

für alle $t \in J$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \\
&\qquad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(l_1^-(t)\big)\big| + \big|\widetilde{b}\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \\
&\qquad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \big|\widetilde{b}\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big|
\end{aligned}
$$

für alle $t \in J$. Hierbei haben wir ausgenutzt, daß wegen $l_1^-(t) < t \leq \tau$ entweder $l_1^-(t) \in J$ oder $l_1^-(t) < \sigma$ gilt. Im zweiten Falle sind $b\big(l_1^-(t)\big)$ und $\widetilde{b}\big(l_1^-(t)\big)$ gemäß (6.19) gleich, woraus

$$
\sup_{t\in J}\big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(l_1^-(t)\big)\big| \leq \|b - \widetilde{b}\| = \|\beta - \widetilde{\beta}\| \tag{6.40}
$$

folgt. Der Mittelwertsatz, (6.26) und (4.22) ergeben weiter

$$
\begin{aligned}
&|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \\
&\qquad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \overline{\omega}\big|l_1^-(t) - \widetilde{l_1^-}(t)\big| \\
&\qquad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \overline{\omega}\Big(|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big|\Big)
\end{aligned}
$$

und folglich

$$
|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^-(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \leq \frac{1}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\|\big) \tag{6.41}
$$

für alle $t \in J$. Anders verläuft dagegen die Abschätzung von

$$
\begin{aligned}
&|a(t)-\widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big| \\
&\qquad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(l_1^+(t)\big)\big| + \big|\widetilde{b}\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big|.
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

Wegen $l_1^+(t) > t \geq \sigma$ gilt entweder $l_1^+(t) \in J$ oder $l_1^+(t) > \tau$. Im zweiten Falle sind $b\big(l_1^+(t)\big)$ und $\widetilde{b}\big(l_1^+(t)\big)$ im allgemeinen nicht gleich, so daß wir nicht analog zu (6.40) schließen können. Wir benötigen daher, daß wegen (4.22), (6.26), dem Mittelwertsatz und (6.19)

$$\begin{aligned}
l_1^+(\tau) - \tau &= a(\tau) - b\big(l_1^+(\tau)\big) \\
&\leq a(\sigma) + \overline{\omega}(\tau - \sigma) - b(\sigma) + \overline{\omega}\big(l_1^+(\tau) - \sigma\big) \\
&\leq A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma) + \overline{\omega}\big(l_1^+(\tau) - \tau\big)
\end{aligned}$$

und damit

$$l_1^+(\tau) - \tau \leq \frac{A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{1 - \overline{\omega}}$$

gilt, woraus für $t \in [\tau, l_1^+(\tau)]$ gemäß (6.19)

$$\begin{aligned}
|b(t) - \widetilde{b}(t)| &= \big|b(\tau) + \dot{b}(\tau)(t - \tau) - \widetilde{b}(\tau) - \dot{\widetilde{b}}(\tau)(t - \tau)\big| \\
&\leq \|b - \widetilde{b}\| + \|\dot{b} - \dot{\widetilde{b}}\|\big(l_1^+(\tau) - \tau\big) \\
&\leq \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \frac{A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{1 - \overline{\omega}}\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\|
\end{aligned}$$

folgt. Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
\big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(l_1^+(t)\big)\big| &\leq \max\Big\{\|b - \widetilde{b}\|, \sup_{s \in [\tau, l_1^+(\tau)]} |b(s) - \widetilde{b}(s)|\Big\} \\
&\leq \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \frac{A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{1 - \overline{\omega}}\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\|.
\end{aligned}$$

Wir setzten dies in (6.42) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&|a(t) - \widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big| \\
&\quad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \frac{A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{1 - \overline{\omega}}\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| \\
&\qquad + \big|\widetilde{b}\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big|
\end{aligned}$$

für alle $t \in J$. Der Mittelwertsatz, (6.26) und (4.22) ergeben weiter

$$\begin{aligned}
&|a(t) - \widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big| \\
&\quad \leq \|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\| + \frac{A_{\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{1 - \overline{\omega}}\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| \\
&\qquad + \overline{\omega}\big|l_1^+(t) - \widetilde{l_1^+}(t)\big|
\end{aligned}$$

$$\leq \|\alpha-\widetilde{\alpha}\|+\|\beta-\widetilde{\beta}\|+\frac{A_{\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)+2\overline{\omega}(\tau-\sigma)}{1-\overline{\omega}}\|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\|$$
$$+\overline{\omega}\Big(|a(t)-\widetilde{a}(t)|+\big|b\big(l_1^+(t)\big)-\widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big|\Big)$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&|a(t)-\widetilde{a}(t)|+\big|b\big(l_1^+(t)\big)-\widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^+}(t)\big)\big| \\
&\qquad\leq \frac{1}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\|+\|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) \\
&\qquad\quad+\frac{A_{\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)+2\overline{\omega}(\tau-\sigma)}{(1-\overline{\omega})^2}\|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\|
\end{aligned}\tag{6.43}$$

für alle $t \in J$. Nun müssen wir in (6.39) noch die Terme mit $\dot{b}$ und $\dot{\widetilde{b}}$ abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\big|\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| &\leq \big|\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(l_1^-(t)\big)\big|+\big|\dot{\widetilde{b}}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \\
&\leq \|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\|+\big|\dot{\widetilde{b}}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big|
\end{aligned}\tag{6.44}$$

für alle $t \in J$. Bei der Abschätzung von $\big|\dot{\widetilde{b}}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big|$ ist zu beachten, daß zum einen wegen (6.24) und $\widetilde{\varphi} \in \overline{\Omega}$

$$\frac{\big|\dot{\widetilde{b}}(t_2)-\dot{\widetilde{b}}(t_1)\big|}{|t_2-t_1|} \leq \overline{\zeta} \qquad (t_1, t_2 \in J,\ t_1 \neq t_2)$$

gilt, und daß zum anderen im Falle $t < \sigma$ wegen (6.19), (6.2) und $\sigma < -1$ die Abschätzung

$$|\ddot{b}(t)| = \eta_2\frac{1}{|t|^2} \leq \eta_2\frac{1}{|\sigma|^2} \leq \eta_2 \qquad (t < \sigma)$$

besteht. Aus (6.44) ergibt sich daher

$$\big|\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \leq \|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\|+(\overline{\zeta}+\eta_2)\big|l_1^-(t)-\widetilde{l_1^-}(t)\big|$$

für alle $t \in J$, und dies hat mit (4.22) sowie (6.41)

$$\begin{aligned}
&\big|\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)-\dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big| \\
&\quad\leq \|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\|+(\overline{\zeta}+\eta_2)\Big(|a(t)-\widetilde{a}(t)|+\big|b\big(l_1^-(t)\big)-\widetilde{b}\big(\widetilde{l_1^-}(t)\big)\big|\Big) \\
&\quad\leq \|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\|+\frac{\overline{\zeta}+\eta_2}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\|+\|\beta-\widetilde{\beta}\|\big)
\end{aligned}\tag{6.45}$$

für alle $t \in J$ zur Folge.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\big|\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l}_1^+(t)\big)\big| &\le \big|\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(l_1^+(t)\big)\big| + \big|\dot{\widetilde{b}}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l}_1^+(t)\big)\big| \\ &\le \|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| + \big|\dot{\widetilde{b}}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l}_1^+(t)\big)\big|\end{aligned} \tag{6.46}$$

für alle $t \in J$. Man beachte hierbei, daß $b(t)$ und $\dot{\widetilde{b}}(t)$ für $t > \tau$ konstant sind und daher wegen $l_1^+(t) > t$ in der Tat

$$\sup_{t \in J} \big|\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(l_1^+(t)\big)\big| \le \|\dot{b} - \dot{\widetilde{b}}\| = \|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\|$$

gilt. Aus (6.46) ergibt sich wegen $\widetilde{\varphi} \in \overline{\Omega}$, (6.24) und (6.19) anhand des Mittelwertsatzes

$$\big|\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l}_1^+(t)\big)\big| \le \|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| + \overline{\zeta}\big|l_1^+(t) - \widetilde{l}_1^+(t)\big|$$

für alle $t \in J$. Mit (4.22) und (6.43) erhalten wir demnach

$$\begin{aligned}&\big|\dot{b}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{\widetilde{b}}\big(\widetilde{l}_1^+(t)\big)\big| \\ &\quad\le \|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| + \overline{\zeta}\Big(|a(t) - \widetilde{a}(t)| + \big|b\big(l_1^+(t)\big) - \widetilde{b}\big(\widetilde{l}_1^+(t)\big)\big|\Big) \\ &\quad\le \|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| + \frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\|\big) \\ &\qquad + \overline{\zeta}\frac{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{(1-\overline{\omega})^2}\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| \\ &\quad\le \frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha - \widetilde{\alpha}\| + \|\beta - \widetilde{\beta}\|\big) \\ &\qquad \left(1 + \overline{\zeta}\frac{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{(1-\overline{\omega})^2}\right)\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\|\end{aligned} \tag{6.47}$$

für alle $t \in J$.

Indem wir die Abschätzungen (6.41)–(6.47) zusammenfassen und

$$\begin{aligned}C_0 &:= \frac{16(\overline{\zeta} + \eta_2)}{(1-\overline{\omega})^3\overline{\delta}^2} + \frac{64}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^3} \\ C_0' &:= \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\left(2 + \overline{\zeta}\frac{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{(1-\overline{\omega})^2}\right) \\ &\quad + 32\frac{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau - \sigma)}{(1-\overline{\omega})^3\overline{\delta}^3}\end{aligned}$$

setzen, folgt aus (6.39)

$$
\begin{aligned}
&\big\|F_1^{\varphi} - F_1^{\widetilde{\varphi}}\big\| \\
&\quad \le \frac{32}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^3}\,\frac{1}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) \\
&\qquad + \frac{32}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^3}\,\frac{1}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) \\
&\qquad + \frac{32}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^3}\,\frac{A_\infty(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau-\sigma)}{(1-\overline{\omega})^2}\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| \\
&\qquad + \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\,\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| \qquad (6.48) \\
&\qquad + \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\,\frac{\overline{\zeta}+\eta_2}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) \\
&\qquad + \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\,\frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{\omega}}\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) \\
&\qquad + \frac{8}{(1-\overline{\omega})^2\overline{\delta}^2}\,\left(1 + \overline{\zeta}\frac{A_\infty(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma) + 2\overline{\omega}(\tau-\sigma)}{(1-\overline{\omega})^2}\right)\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\| \\
&\quad \le C_0\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) + C_0'\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\|.
\end{aligned}
$$

Mit (6.38), (6.48) und

$$
\begin{aligned}
C := 2(1+\tau-\sigma)\Bigg(&\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}(\tau-\sigma)}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2} \\
&+ \frac{1}{2}\max\{\kappa_1,\kappa_2\}(\tau-\sigma)(C_0 + C_0')\Bigg)
\end{aligned}
$$

ergibt (6.36) jetzt

$$
\begin{aligned}
&\big\|\dot{H}_1(\lambda,\varphi) - \dot{H}_1(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big\| \\
&\quad \le \frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}|\lambda-\widetilde{\lambda}| + \frac{1}{2}\kappa_1(\tau-\sigma)\frac{16}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2}\,|\lambda-\widetilde{\lambda}| \\
&\qquad + \frac{1}{2}\kappa_1(\tau-\sigma)\Big(C_0\big(\|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\|\big) + C_0'\|\dot{\beta} - \dot{\widetilde{\beta}}\|\Big)
\end{aligned}
$$

$$\leq \left(\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}(\tau-\sigma)}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\max\{\kappa_1,\kappa_2\}(\tau-\sigma)(C_0+C_0') \right)$$

$$\times \Big(|\lambda-\widetilde{\lambda}| + \|\alpha-\widetilde{\alpha}\| + \|\dot{\alpha}-\dot{\widetilde{\alpha}}\| + \|\beta-\widetilde{\beta}\| + \|\dot{\beta}-\dot{\widetilde{\beta}}\| \Big)$$

$$= \frac{C}{2(1+\tau-\sigma)} \big(|\lambda-\widetilde{\lambda}| + \|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_X \big).$$

Ebenso besteht die Abschätzung

$$\big\|\dot{H}_2(\lambda,\varphi) - \dot{H}_2(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big\| \leq \frac{C}{2(1+\tau-\sigma)} \big(|\lambda-\widetilde{\lambda}| + \|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_X \big),$$

wie eine analoge Betrachtung zeigt. Zudem gilt

$$\big\|H_i(\lambda,\varphi) - H_i(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big\| \leq (\tau-\sigma)\big\|\dot{H}_i(\lambda,\varphi) - \dot{H}_i(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big\| \quad (i=1,2).$$

Wir erhalten also schließlich

$$\big\|H(\lambda,\varphi) - H(\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi})\big\|_X \leq C\big(|\lambda-\widetilde{\lambda}| + \|\varphi-\widetilde{\varphi}\|_X \big),$$

und somit ist H stetig, da C von den beliebig gewählten $(\lambda,\varphi), (\widetilde{\lambda},\widetilde{\varphi}) \in [0,1]\times\overline{\Omega}$ nicht abhängt.

Zum Beweis der Kompaktheit von H zeigen wir als zweites, daß die Menge $H([0,1]\times\overline{\Omega})$ relativ kompakt ist. Hierzu sei $\{(\lambda_n,\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $[0,1]\times\overline{\Omega}$. Gemäß (6.31) gilt

$$\big\|\dot{H}_1(\lambda_n,\varphi_n)\big\| \leq \|\dot{a}_0\| + \left\| \frac{P_1^{\lambda_n,\varphi_n}}{\sqrt{1+\big(P_1^{\lambda_n,\varphi_n}\big)^2}} \right\| < 2$$

sowie

$$\big|\dot{H}_1(\lambda_n,\varphi_n)(t) - \dot{H}_1(\lambda_n,\varphi_n)(t')\big|$$

$$\leq \big|\dot{a}_0(t)-\dot{a}_0(t')\big| + \left| \frac{P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t)}{\sqrt{1+\big(P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t)\big)^2}} - \frac{P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t')}{\sqrt{1+\big(P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t')\big)^2}} \right|$$

$$\leq \big|\dot{a}_0(t)-\dot{a}_0(t')\big| + \big|P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t) - P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t')\big|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, t' \in J$. Mit (6.14) und (6.32) folgt

$$\begin{aligned} &\left|\dot H_1(\lambda_n,\varphi_n)(t) - \dot H_1(\lambda_n,\varphi_n)(t')\right| \\ &\quad \le 2g(0)|t-t'| + \left|P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t) - P_1^{\lambda_n,\varphi_n}(t')\right| \qquad (6.49) \\ &\quad \le 2g(0)|t-t'| + \left|\frac{\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}} - \frac{\dot a_0(t')}{\sqrt{1-\dot a_0(t')^2}}\right| + \left|\int_{t'}^{t} \frac{1}{2}\kappa_1 F_1^{\varphi}(s)ds\right|. \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei der folgende einfache Sachverhalt festgehalten: aufgrund von

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \ge 1 \qquad (x \in]-1,1[) \qquad (6.50)$$

gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{y-x}{\left(1-\max\{|x|,|y|\}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (-1 < x < y < 1) \qquad (6.51)$$

sowie

$$y - x \le \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < y < 1). \qquad (6.52)$$

Von diesen Ungleichungen werden wir im folgenden des öfteren Gebrauch machen.

Wegen (6.51), der Eigenschaften (6.13) und (6.14) von a_0 sowie (6.38) ergibt sich aus (6.49)

$$\begin{aligned} &\left|\dot H_1(\lambda_n,\varphi_n)(t) - \dot H_1(\lambda_n,\varphi_n)(t')\right| \\ &\quad \le 2g(0)|t-t'| + \frac{1}{\left(1-\omega_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}|\dot a_0(t) - \dot a_0(t')| + \frac{1}{2}\kappa_1\left\|F_1^{\varphi}\right\||t-t'| \\ &\quad \le 2g(0)|t-t'| + \frac{2g(0)}{\left(1-\omega_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}|t-t'| + \frac{1}{2}\kappa_1\frac{16}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2}|t-t'| \\ &\quad \le \left(\frac{4g(0)}{\left(1-\omega_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2}\right)|t-t'| \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, t' \in J$. Mit den von n unabhängigen Konstanten

$$\widetilde{C}_0 := 2, \quad \widetilde{C}_0' := \frac{4g(0)}{\left(1-\omega_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2}$$

gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \big\|\dot{H}_2(\lambda_n,\varphi_n)\big\| &\le \widetilde{C}_0, \\ \big|\dot{H}_2(\lambda_n,\varphi_n)(t)-\dot{H}_2(\lambda_n,\varphi_n)(t')\big| &\le \widetilde{C}_0'|t-t'| \end{aligned} \qquad (t,t'\in J, n\in\mathbb{N})$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \big\|H_i(\lambda_n,\varphi_n)\big\| &\le (\tau-\sigma)\widetilde{C}_0, \\ \big|H_i(\lambda_n,\varphi_n)(t)-H_i(\lambda_n,\varphi_n)(t')\big| &\le \widetilde{C}_0|t-t'| \end{aligned} \qquad (t,t'\in J, n\in\mathbb{N}, i=1,2).$$

Nun betrachten wir in dem linearen Raum $C(J,\mathbb{R}^4)$ eine Folge

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad f_n=\big(f_n^{(1)},f_n^{(2)},f_n^{(3)},f_n^{(4)}\big)\in C(J,\mathbb{R}^4),$$

die durch

$$\begin{aligned} f_n^{(1)} &:= H_1(\lambda_n,\varphi_n), \quad & f_n^{(2)} &:= \dot{H}_1(\lambda_n,\varphi_n), \\ f_n^{(3)} &:= H_2(\lambda_n,\varphi_n), \quad & f_n^{(4)} &:= \dot{H}_2(\lambda_n,\varphi_n) \end{aligned}$$

definiert sei. Bezüglich der gemäß

$$\|f\|_{C(J,\mathbb{R}^4)} := \sup_{t\in J}\sum_{i=1}^{4}\big|f^{(i)}(t)\big|, \quad f=\big(f^{(1)},f^{(2)},f^{(3)},f^{(4)}\big)\in C(J,\mathbb{R}^4),$$

gegebenen Norm $\|\cdot\|_{C(J,\mathbb{R}^4)}$ ist $C(J,\mathbb{R}^4)$ ein Banach-Raum, und die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß

$$\|f_n\|_{C(J,\mathbb{R}^4)} \le \big(2+2(\tau-\sigma)\big)\widetilde{C}_0 \quad (n\in\mathbb{N})$$

gleichförmig beschränkt sowie gemäß

$$\sum_{i=1}^{4}\big|f_n^{(i)}(t)-f_n^{(i)}(t')\big| \le (2\widetilde{C}_0+2\widetilde{C}_0')|t-t'| \quad (t,t'\in J, n\in\mathbb{N})$$

gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli besitzt daher $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(J,\mathbb{R}^4)$ eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dies aber bedeutet wegen

$$\|H(\lambda_n,\varphi_n)-H(\lambda_m,\varphi_m)\|_X \le 4\,\|f_n-f_m\|_{C(J,\mathbb{R}^4)} \qquad (m,n\in\mathbb{N}),$$

daß die Folge $\{H(\lambda_n,\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X die konvergente Teilfolge $\{H(\lambda_{n_k},\varphi_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt. Da die Folge $\{(\lambda_n,\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]\times\overline{\Omega}$ beliebig gewählt war, ist demnach die Menge $H([0,1]\times\overline{\Omega})$ relativ kompakt. Hieraus folgt zusammen mit der zuvor bewiesenen Stetigkeit von H, daß H ein kompakter Operator ist.

Als letztes steht jetzt noch der Beweis von $0\notin\big(\mathrm{Id}-H(\lambda,\cdot)\big)(\partial\Omega)$ für jedes $\lambda\in[0,1]$ aus. Hierzu wählen wir ein beliebiges, aber festes $\lambda\in[0,1]$ und zeigen, daß eine (hypothetisch als existent angenommene) Lösung $\varphi \in \overline{\Omega}$ der Gleichung $H(\lambda,\varphi)-\varphi=0$ bestimmten A-priori-Schranken unterliegt. Alsdann passen wir die Konstanten $\overline{\omega}$, $\overline{\delta}$ und $\overline{\zeta}$, welche in die Definition der Menge Ω eingehen, so an diese A-priori-Schranken an, daß aus der Gültigkeit von $H(\lambda,\varphi)-\varphi=0$ für ein $\varphi\in\overline{\Omega}$ zwangsläufig $\varphi\notin\partial\Omega$ folgt.

Ist $\varphi=(\alpha,\beta)\in\overline{\Omega}$ eine Lösung der Gleichung $H(\lambda,\varphi)-\varphi=0$, so gilt gemäß (6.19) und der Definition (6.31) von H

$$\dot a(t)=\dot\alpha(t)+\dot a_0(t)=\frac{P_1^{\lambda,\varphi}(t)}{\sqrt{1+P_1^{\lambda,\varphi}(t)^2}},\quad \dot b(t)=\dot\beta(t)+\dot b_0(t)=\frac{P_2^{\lambda,\varphi}(t)}{\sqrt{1+P_2^{\lambda,\varphi}(t)^2}},$$

und damit gemäß der Definition (6.32) von $P_1^{\lambda,\varphi}$ und $P_2^{\lambda,\varphi}$

$$\begin{aligned}\frac{\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}}&=\lambda\frac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}}+(1-\lambda)\frac{\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}}+\lambda\int_\sigma^t\frac{1}{2}\kappa_1F_1^\varphi(s)ds\\ \frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}}&=\lambda\frac{\dot B_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot B_{-\infty}(\sigma)^2}}+(1-\lambda)\frac{\dot b_0(t)}{\sqrt{1-\dot b_0(t)^2}}-\lambda\int_\sigma^t\frac{1}{2}\kappa_2F_2^\varphi(s)ds\end{aligned}\tag{6.53}$$

für alle $t\in J$. Da $P_1^{\lambda,\varphi}(t)$ und $P_2^{\lambda,\varphi}(t)$ in J differenzierbar sind, gilt gleiches auch für $\dot a(t)$ und $\dot b(t)$ in J. Differentiation nach t ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\ddot a(t)}{\left(1-\dot a(t)^2\right)^{\frac32}}&=(1-\lambda)\frac{\ddot a_0(t)}{\left(1-\dot a_0(t)^2\right)^{\frac32}}+\lambda\frac12\kappa_1F_1^\varphi(t)\\ \frac{\ddot b(t)}{\left(1-\dot b(t)^2\right)^{\frac32}}&=(1-\lambda)\frac{\ddot b_0(t)}{\left(1-\dot b_0(t)^2\right)^{\frac32}}-\lambda\frac12\kappa_2F_2^\varphi(t)\end{aligned}\tag{6.54}$$

für alle $t\in J$. (Man beachte, daß hier und im folgenden mit $\ddot a(\sigma)$, $\ddot b(\sigma)$ bzw. $\ddot a(\tau)$, $\ddot b(\tau)$ stets die rechts- bzw. linksseitige zweite Ableitung gemeint ist; die zweite Ableitung selbst existiert bei σ bzw. τ im allgemeinen nicht.)

Als erstes leiten wir eine obere Schranke für $|\dot a|$ und $|\dot b|$ in J her. Es gilt

$$\begin{aligned}&\frac{1-v_{-\infty}\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}}\\ &\quad=\frac{1-\lambda v_{-\infty}\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}}-(1-\lambda)\frac{v_{-\infty}\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}}\\ &\qquad+(1-\lambda)\int_\sigma^t\frac{\ddot a_0(s)\dot a(s)}{\left(1-\dot a_0(s)^2\right)^{\frac32}}ds+\lambda\int_\sigma^t\left(-v_{-\infty}+\dot a(s)\right)\frac12\kappa_1F_1^\varphi(s)ds\end{aligned}\tag{6.55}$$

für alle $t \in J$. Zum Beweis differenzieren wir beide Seiten dieser Gleichung nach t. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{1-v_{\infty}\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} &= \frac{-v_{\infty}\ddot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} + \frac{1-v_{\infty}\dot a(t)}{\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}}\dot a(t)\ddot a(t)\\ &= \big(-v_{\infty}+\dot a(t)\big)\frac{\ddot a(t)}{\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Bigg(&\frac{1-\lambda v_{\infty}\dot A_{\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{\infty}(\sigma)^2}} - (1-\lambda)\frac{v_{\infty}\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}}\\ &+(1-\lambda)\int_{\sigma}^{t}\frac{\ddot a_0(s)\dot a(s)}{\big(1-\dot a_0(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}}ds + \lambda\int_{\sigma}^{t}\big(-v_{\infty}+\dot a(s)\big)\frac{1}{2}\kappa_1 F_1^{\varphi}(s)ds\Bigg)\\ &= -(1-\lambda)v_{\infty}\frac{\ddot a_0(t)}{\big(1-\dot a_0(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}} + (1-\lambda)\frac{\ddot a_0(t)\dot a(t)}{\big(1-\dot a_0(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}}\\ &\quad +\lambda(-v_{\infty}+\dot a(t))\frac{1}{2}\kappa_1 F_1^{\varphi}(t)\\ &= (-v_{\infty}+\dot a(t))\left((1-\lambda)\frac{\ddot a_0(t)}{\big(1-\dot a_0(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}} + \lambda\frac{1}{2}\kappa_1 F_1^{\varphi}(t)\right)\end{aligned}$$

für alle $t \in J$. Wegen (6.54) sind also die Ableitungen von linker und rechter Seite in (6.55) gleich. Außerdem ist die Gleichung (6.55) wegen (6.12) und (6.19) für $t = \sigma$ richtig, und damit gilt sie für alle $t \in J$. Im Falle $\lambda = 1$ besteht eine Analogie zwischen (6.55) und (5.7), wobei hier v_{∞} die Rolle von θ übernimmt. Wie dort verwenden wir die Gleichung (6.55), um eine Schranke an $|\dot a|$ zu gewinnen. Aus (6.55) folgt wegen der Eigenschaften (6.12)–(6.14) von a_0 und (6.50)

$$\begin{aligned}&\frac{1-v_{\infty}\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}}\\ &\quad < \frac{2}{\sqrt{1-\dot A_{\infty}(\sigma)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}} + \int_{\sigma}^{t}\frac{\ddot a_0(s)}{\big(1-\dot a_0(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}}ds\\ &\quad\quad +\lambda\frac{1}{2}\kappa_1\int_{\sigma}^{t}\big(-v_{\infty}+\dot a(s)\big)F_1^{\varphi}(s)ds\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}} - \frac{\dot a_0(\sigma)}{\sqrt{1-\dot a_0(\sigma)^2}}$$
$$+\lambda\frac{1}{2}\kappa_1 \int\limits_\sigma^t \big(-v_{-\infty} + \dot a(s)\big) F_1^\varphi(s)ds$$
$$\leq \frac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \lambda\frac{1}{2}\kappa_1 \int\limits_\sigma^t \big(-v_{-\infty} + \dot a(s)\big) F_1^\varphi(s)ds$$

für alle $t \in J$. Aufgrund der Definition (6.30) von F_1^φ können wir den Integranden analog zu (5.12) (mit $v_{-\infty}$ an Stelle von θ) abschätzen. So ergibt sich

$$\frac{1-v_{-\infty}\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}}$$
$$< \frac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \lambda\frac{1}{2}\kappa_1\frac{1+v_{-\infty}}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)} - \lambda\frac{1}{2}\kappa_1\frac{1+v_{-\infty}}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}$$
$$+\lambda\frac{1}{2}\kappa_1\frac{1-v_{-\infty}}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)} - \lambda\frac{1}{2}\kappa_1\frac{1-v_{-\infty}}{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}$$
$$\leq \frac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{\kappa_1}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)} + \frac{\kappa_1}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}$$

für alle $t \in J$. Nach Hilfssatz 5.1 und (6.19) folgt

$$\frac{1-v_{-\infty}\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} \leq \frac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{2\kappa_1}{a(\sigma)-b(\sigma)} + \frac{2\kappa_1}{a(\sigma)-b(\sigma)}$$
$$\leq \frac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{4\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}$$

für alle $t \in J$. Mit

$$1 - v_{-\infty}\dot a(t) > 1 - |v_{-\infty}| \geq 1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}$$

erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} \leq \frac{1}{1-\max\big\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\big\}}\left(\frac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{4\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}\right)$$

für alle $t \in J$. Setzen wir nun

$$K_0 := \frac{\dfrac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \dfrac{4\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}}{1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}}, \tag{6.56}$$

so gilt $K_0 > 1$ und $|\dot a(t)| \le \sqrt{1 - 1/K_0^2}$ für alle $t \in J$. Eine analoge Betrachtung zeigt, daß dieselbe Ungleichung auch für $\dot b$ in J besteht. Wir haben also die Abschätzung

$$|\dot a(t)|, |\dot b(t)| \le \sqrt{1 - \frac{1}{K_0^2}} < 1 \quad (t \in J) \tag{6.57}$$

gewonnen.

Als nächstes wollen wir eine untere Schranke für $a - b$ in J ermitteln. Gemäß (6.53) und (6.30) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} &> \lambda \frac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1 - \dot A_{-\infty}(\sigma)^2}} + (1-\lambda)\frac{\dot a_0(t)}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}} \\ &\quad + \lambda \frac{1}{2}\kappa_1 \int_\sigma^t \frac{1 + \dot b\big(l_1^-(s)\big)}{1 - \dot b\big(l_1^-(s)\big)} \frac{1}{\Big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2} ds \\ &\ge -\frac{1}{\sqrt{1 - \dot A_{-\infty}(\sigma)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\dot a_0(t)^2}} \\ &\quad + \lambda \frac{1}{2}\kappa_1 \int_\sigma^t \frac{-\dot a(s) + \dot b\big(l_1^-(s)\big)}{\Big(1 - \dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\Big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2} ds \end{aligned}$$

für alle $t \in J$. Mit (6.13), (5.11), Hilfssatz 5.1 und (6.19) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} &\ge -\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \lambda\frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1}{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)} - \lambda\frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1}{a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \\ &\ge \frac{-2}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \lambda\frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1 - \max\limits_{s \in [l_1^-(t), t]} \dot b(s)}{a(t) - b(t)} - \lambda \frac{1}{2}\frac{2}{a(\sigma) - b(\sigma)} \\ &\ge \frac{-2}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \lambda\frac{1}{2}\kappa_1 \frac{1 - v_{-\infty}}{a(t) - b(t)} - \frac{\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)} \end{aligned} \tag{6.58}$$

für alle $t \in J$. Im letzten Schritt haben wir benutzt, daß $\dot b(t) < v_{-\infty}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dies zeigt man folgendermaßen. Gemäß (6.19) gilt $b(t) = B_{-\infty}(t)$ für $t < \sigma$, und mit (6.2) hat dies

$$\lim_{t\to-\infty}\dot b(t)=\lim_{t\to-\infty}\dot B_{-\infty}(t)=\lim_{t\to-\infty}\left(v_{-\infty}-\eta_2\frac{1}{|t|}\right)=v_{-\infty}$$

sowie

$$\ddot b(t)=\ddot B_{-\infty}(t)=-\eta_s\frac{1}{|t|^2}<0 \qquad (t<\sigma)$$

zur Folge. Gemäß (6.54) und (6.19) gilt zudem $\ddot b(t)\le 0$ für alle $t\ge\sigma$ und somit

$$\ddot b(t)\le 0,\quad \dot b(t)<v_{-\infty} \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{6.59}$$

Analog gilt auch

$$\ddot a(t)\ge 0,\quad \dot a(t)>u_{-\infty} \qquad (t\in\mathbb{R}). \tag{6.60}$$

Wegen $\ddot a(t)-\ddot b(t)\ge 0$ für $t\in\mathbb{R}$ wächst $\dot a(t)-\dot b(t)$ insbesondere im Intervall J monoton. Nach Voraussetzung (6.19) und (6.3) gilt

$$\dot a(\sigma)-\dot b(\sigma)=A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)<0,$$

und (6.23) zufolge gilt

$$\dot a(\tau)-\dot b(\tau)\ge 0.$$

Demnach existiert ein $t_0\in J=[\sigma,\tau]$ mit

$$\dot a(t_0)-\dot b(t_0)=0 \tag{6.61}$$

sowie

$$a(t_0)-b(t_0)=\min_{t\in J}\big(a(t)-b(t)\big). \tag{6.62}$$

Gemäß (6.61), $\ddot b\le 0$ und (6.19) gilt $\dot a(t_0)=\dot b(t_0)\le\dot B_{-\infty}(\sigma)$. Nach (6.18) hat dies $\dot a(t_0)\le\dot B_{-\infty}(\sigma)\le\omega_0$ und damit wegen (6.52)

$$\frac{\dot a(t_0)}{\sqrt{1-\dot a(t_0)^2}}\le\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\omega_0^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-\omega_0^2}}$$

zur Folge. Indem wir (6.58) für $t=t_0$ auswerten, ergibt sich hieraus und mit (6.62)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\omega_0^2}}&>\frac{\dot a(t_0)}{\sqrt{1-\dot a(t_0)^2}}\\&\ge\frac{-2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}+\lambda\frac{1}{2}\kappa_1\frac{1-v_{-\infty}}{a(t_0)-b(t_0)}-\frac{\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)} \qquad (6.63)\\&\ge\frac{-2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}+\lambda\frac{1}{2}\kappa_1\frac{1-v_{-\infty}}{\min_{t\in J}\big(a(t)-b(t)\big)}-\frac{\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}.\end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$K_0' := \frac{\frac{1}{2}\kappa_1(1 - v_{-\infty})}{\frac{3}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \frac{\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}} \tag{6.64}$$

und erhalten

$$a(t) - b(t) \geq \lambda K_0' \geq 0 \quad (t \in J). \tag{6.65}$$

Für $\lambda = 0$ ist diese Abschätzung untauglich. Um eine von λ unabhängige Schranke zu gewinnen, beobachten wir zunächst, daß nach (6.53)

$$\frac{\dot{a}(t)}{\sqrt{1-\dot{a}(t)^2}} - \frac{\dot{a}_0(t)}{\sqrt{1-\dot{a}_0(t)^2}} = \lambda\left(\frac{\dot{A}_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot{A}_{-\infty}(\sigma)^2}} - \frac{\dot{a}_0(t)}{\sqrt{1-\dot{a}_0(t)^2}}\right)$$
$$+\lambda\int_\sigma^t \frac{1}{2}\kappa_1 F_1^\varphi(s)ds$$

für alle $t \in J$ gilt. Mit $F_1^\varphi > 0$ gemäß (6.30) sowie mit (6.13) und (6.18) ergibt dies

$$\frac{\dot{a}(t)}{\sqrt{1-\dot{a}(t)^2}} - \frac{\dot{a}_0(t)}{\sqrt{1-\dot{a}_0(t)^2}} > -\lambda\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}$$

für alle $t \in J$. Wegen (6.52) folgt

$$\dot{a}(t) - \dot{a}_0(t) > -\lambda\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}$$

für alle $t \in J$. Mit (6.19) und (6.13) erhalten wir hieraus durch Integration

$$a(t) > a_0(t) + a(\sigma) - a_0(\sigma) - \lambda\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}(t-\sigma)$$
$$\geq a_0(t) - \lambda\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}(\tau-\sigma)$$

für alle $t \in J$. Analog gilt auch

$$b(t) < b_0(t) + \lambda\frac{2}{\sqrt{1-\omega_0^2}}(\tau-\sigma) \qquad (t \in J),$$

und wegen (6.16) folglich

$$
\begin{aligned}
a(t)-b(t) &> a_0(t)-b_0(t)-\lambda\frac{4(\tau-\sigma)}{\sqrt{1-\omega_0^2}}\\
&\geq \delta_0-\lambda\frac{4(\tau-\sigma)}{\sqrt{1-\omega_0^2}}
\end{aligned}
$$

für alle $t\in J$. In Kombination mit (6.65) ergibt dies schließlich die folgende Abschätzung:

$$
a(t)-b(t)\geq\frac{\delta_0K_0'}{K_0'+\dfrac{4(\tau-\sigma)}{\sqrt{1-\omega_0^2}}}>0\quad(t\in\mathbb{R}). \tag{6.66}
$$

Als nächstes beweisen wir, daß $\dot a(\tau)-\dot b(\tau)>0$ gilt. Hierzu nehmen wir

$$
\dot a(\tau)-\dot b(\tau)\leq 0 \tag{6.67}
$$

an und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Gemäß (6.53) gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\dot a(\tau)}{\sqrt{1-\dot a(\tau)^2}}-\frac{\dot b(\tau)}{\sqrt{1-\dot b(\tau)^2}}\\
&\quad=\lambda\left(\frac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}}-\frac{\dot B_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot B_{-\infty}(\sigma)^2}}\right)\\
&\quad\quad+(1-\lambda)\left(\frac{\dot a_0(\tau)}{\sqrt{1-\dot a_0(\tau)^2}}-\frac{\dot b_0(\tau)}{\sqrt{1-\dot b_0(\tau)^2}}\right)\\
&\quad\quad+\lambda\frac{1}{2}\int_\sigma^\tau\Big(\kappa_1F_1^\varphi(s)+\kappa_2F_2^\varphi(s)\Big)ds.
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

Wir müssen zeigen, daß diese Größe streng positiv ist. Wegen (6.18) gilt

$$
\frac{\dot A_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot A_{-\infty}(\sigma)^2}}-\frac{\dot B_{-\infty}(\sigma)}{\sqrt{1-\dot B_{-\infty}(\sigma)^2}}>-\frac{2}{\sqrt{1-\max\big\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\big\}^2}},
$$

und aufgrund von (6.15) gemeinsam mit (6.52) gilt zudem

$$
\frac{\dot a_0(\tau)}{\sqrt{1-\dot a_0(\tau)^2}}-\frac{\dot b_0(\tau)}{\sqrt{1-\dot b_0(\tau)^2}}\geq\dot a_0(\tau)-\dot b_0(\tau)>0.
$$

Aus (6.68) ergibt sich also

$$\frac{\dot a(\tau)}{\sqrt{1-\dot a(\tau)^2}}-\frac{\dot b(\tau)}{\sqrt{1-\dot b(\tau)^2}}>-\lambda\frac{2}{\sqrt{1-\max\big\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\big\}^2}} \\ +\lambda\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma}^{\tau}\Big(\kappa_1F_1^{\varphi}(s)+\kappa_2F_2^{\varphi}(s)\Big)ds. \tag{6.69}$$

Nun schätzen wir das Integral ab. Gemäß (6.30) gilt

$$\begin{aligned} F_1^{\varphi}(t) &> \frac{1+\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\frac{1}{\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}, \\ F_2^{\varphi}(t) &> \frac{1-\dot a\big(l_2^-(t)\big)}{1+\dot a\big(l_2^-(t)\big)}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(t)\big)-b(t)\Big)^2} \end{aligned} \tag{6.70}$$

für alle $t\in J$. Die Annahme (6.67) hat wegen (6.59) und (6.60)

$$\dot a(t)-\dot b(t)\le 0$$

und demnach

$$\begin{aligned} u_{-\infty} &< \dot a\big(l_2^-(t)\big)\le \dot a(t)\le \dot b(t)<v_{-\infty}, \\ v_{-\infty} &> \dot b\big(l_1^-(t)\big)\ge \dot b(t)\ge \dot a(t)>u_{-\infty} \end{aligned} \tag{6.71}$$

sowie mit (6.19)

$$a(t)-b(t)\le a(\sigma)-b(\sigma)=A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma) \tag{6.72}$$

für alle $t\in J$ zur Konsequenz. Anhand des Mittelwertsatzes und (4.22) gewinnen wir hieraus

$$\begin{aligned} a(t)-b\big(l_1^-(t)\big) &\le a(t)-b(t)+\dot b\big(l_1^-(t)\big)\big(t-l_1^-(t)\big) \\ &\le A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)+\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big), \\ a\big(l_2^-(t)\big)-b(t) &\le a(t)-b(t)-\dot a\big(l_2^-(t)\big)\big(t-l_2^-(t)\big) \\ &\le A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)-\dot a\big(l_2^-(t)\big)\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big) \end{aligned}$$

und somit

$$a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\le\frac{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)},\quad a\big(l_2^-(t)\big)-b(t)\le\frac{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}{1+\dot a\big(l_2^-(t)\big)}$$

für alle $t \in J$. Die Ungleichungen (6.70) ergeben nun

$$F_1^\varphi(t) > \frac{1+\dot b\bigl(l_1^-(t)\bigr)}{1-\dot b\bigl(l_1^-(t)\bigr)}\left(\frac{1-\dot b\bigl(l_1^-(t)\bigr)}{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}\right)^2 = \frac{1-\dot b\bigl(l_1^-(t)\bigr)^2}{\bigl(A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)\bigr)^2},$$

$$F_2^\varphi(t) > \frac{1-\dot a\bigl(l_2^-(t)\bigr)}{1+\dot a\bigl(l_2^-(t)\bigr)}\left(\frac{1+\dot a\bigl(l_2^-(t)\bigr)}{A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)}\right)^2 = \frac{1-\dot a\bigl(l_2^-(t)\bigr)^2}{\bigl(A_{-\infty}(\sigma)-B_{-\infty}(\sigma)\bigr)^2},$$

und wegen (6.71) sowie (6.2) impliziert dies

$$F_i^\varphi(t) > \frac{1-\max\bigl\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\bigr\}^2}{\Bigl(x_{-\infty}-y_{-\infty}+(u_{-\infty}-v_{-\infty})\sigma\Bigr)^2} \qquad (i=1,2)$$

für alle $t \in J$. Aus (6.69) folgt hiermit

$$\begin{aligned}\frac{\dot a(\tau)}{\sqrt{1-\dot a(\tau)^2}} &- \frac{\dot b(\tau)}{\sqrt{1-\dot b(\tau)^2}} \\ &> -\lambda\frac{2}{\sqrt{1-\max\bigl\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\bigr\}^2}} \\ &\quad+\lambda\min\{\kappa_1,\kappa_2\}\frac{1-\max\bigl\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\bigr\}^2}{\Bigl(x_{-\infty}-y_{-\infty}+(u_{-\infty}-v_{-\infty})\sigma\Bigr)^2}(\tau-\sigma).\end{aligned}$$

Nun machen wir Gebrauch von der Voraussetzung (6.4) an τ und erhalten

$$\frac{\dot a(\tau)}{\sqrt{1-\dot a(\tau)^2}} - \frac{\dot b(\tau)}{\sqrt{1-\dot b(\tau)^2}} > 0.$$

Gemäß (6.52) bedeutet dies $\dot a(\tau)-\dot b(\tau) > 0$. Damit haben wir einen Widerspruch zu unserer Annahme (6.67) erzielt. Also gilt in der Tat

$$\dot a(\tau) - \dot b(\tau) > 0. \tag{6.73}$$

Schließlich benötigen wir noch eine Schranke für $|\ddot a|$ und $|\ddot b|$ in J. Aus (6.54), (6.13) und (6.14) folgt

$$|\ddot a(t)| < \frac{2g(0)}{\bigl(1-\omega_0^2\bigr)^{\frac32}} + \frac12\kappa_1\bigl\|F_1^\varphi\bigr\|, \quad |\ddot b(t)| < \frac{2g(0)}{\bigl(1-\omega_0^2\bigr)^{\frac32}} + \frac12\kappa_2\bigl\|F_2^\varphi\bigr\|$$

für alle $t \in J$. Mit (6.38) und der entsprechenden Abschätzung für $\bigl\|F_2^\varphi\bigr\|$ erhalten wir also

$$|\ddot a(t)|, |\ddot b(t)| < \frac{2g(0)}{\bigl(1-\omega_0^2\bigr)^{\frac32}} + \frac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{(1-\overline{\omega})\overline{\delta}^2} \qquad (t \in J). \tag{6.74}$$

Hiermit sind nun alle erforderlichen Abschätzungen gezeigt. Wir fassen zusammen: setzt man ausgehend von (6.56) und (6.64)

$$K := \max\left\{\sqrt{1-\frac{1}{K_0^2}},\ \frac{1}{2}(1+\omega_0)\right\}, \quad K' := \frac{\delta_0 K_0'}{K_0' + \dfrac{4(\tau-\sigma)}{\sqrt{1-\omega_0^2}}},$$

$$\widetilde{K} := \frac{2g(0)}{\left(1-\omega_0^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{(1-K)K'^2},$$

so gilt

$$\omega_0 < K < 1, \quad 0 < K' < \delta_0, \quad \widetilde{K} > 2g(0), \tag{6.75}$$

und gemäß (6.57), (6.66), (6.73) und (6.74) gilt weiterhin

$$\begin{array}{l} |\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| < K, \quad a(t)-b(t) > K', \\ \dot{a}(\tau)-\dot{b}(\tau) > 0, \quad |\ddot{a}(t)|, |\ddot{b}(t)| < \widetilde{K} \end{array} \qquad (t \in J). \tag{6.76}$$

Man beachte, daß K, K' und $\widetilde{K}$ nicht von den Konstanten $\overline{\omega}$, $\overline{\delta}$ und $\overline{\zeta}$ abhängen, welche in die Definition der Menge Ω eingehen. Im Rahmen der Generalvoraussetzung (6.20) besteht Freiheit bei der Wahl dieser Konstanten. Wir setzen

$$\overline{\omega} := K, \quad \overline{\delta} := K', \quad \overline{\zeta} := \widetilde{K}.$$

Dies entspricht einer speziellen Festlegung der Menge Ω, und alle vorangegangenen Betrachtungen bleiben hiervon unberührt, denn wegen (6.75) ist diese Festlegung mit der Generalvoraussetzung (6.20) verträglich. Die Abschätzungen (6.76) besagen nun, daß $\varphi \notin \partial\Omega$ gilt. Damit haben wir gezeigt: falls für ein $\lambda \in [0,1]$ und ein $\varphi \in \overline{\Omega}$ die Gleichung $H(\lambda,\varphi)-\varphi = 0$ erfüllt ist, so muß $\varphi \notin \partial\Omega$ gelten. Dies aber bedeutet $0 \notin \big(\mathrm{Id} - H(\lambda,\cdot)\big)(\partial\Omega)$ für jedes $\lambda \in [0,1]$.

Die beim Beweis der Existenz einer bedingten Lösung verwendeten Eigenschaften des Operators H sind damit nachträglich gezeigt.

Jetzt müssen wir noch beweisen, daß für jedes $\omega \in [0,1[$ mit (6.6) und jedes $\delta > 0$ mit (6.7) die Abschätzungen (6.8) bestehen. Hierfür kehren wir noch einmal zu (6.57) und (6.65) zurück. Die bedingte Lösung $\phi = (a,b)$ ist via (6.19) einem Fixpunkt $\varphi = (\alpha,\beta)$ von $H(1,\cdot)$ in Ω zugehörig. Wir hatten gezeigt, daß $H(1,\varphi) = \varphi$ die Gültigkeit der Ungleichungen

$$|\dot{a}(t)|, |\dot{b}(t)| \le \sqrt{1-\frac{1}{K_0^2}} < 1 \qquad (t \in J)$$

und

$$a(t) - b(t) \ge K_0' > 0 \qquad (t \in J)$$

nach sich zieht, wobei K_0 und K_0' durch (6.56) und (6.64) gegeben sind. Wegen (6.13) gilt

$$K_0 \leq 2\frac{\dfrac{5}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \dfrac{4\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}}{1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2} \leq \frac{10 + \dfrac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}}{\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher

$$|\dot a(t)|, |\dot b(t)| \leq \sqrt{1 - \frac{\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^3}{\Big(10 + \dfrac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}\Big)^2}} < 1 \qquad (t \in J), \tag{6.77}$$

mit

$$\sqrt{1 - \frac{\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^3}{\Big(10 + \dfrac{8\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}\Big)^2}} > \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}. \tag{6.78}$$

Weiter gilt

$$K_0' \geq \frac{\kappa_1\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)}{\dfrac{12}{\sqrt{1-\omega_0^2}} + \dfrac{4\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}} \geq \frac{\kappa_1\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}}{12 + \dfrac{4\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}}$$

und daher

$$a(t) - b(t) \geq \frac{\kappa_1\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}}{12 + \dfrac{4\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma) - B_{-\infty}(\sigma)}} > 0 \qquad (t \in J). \tag{6.79}$$

Aufgrund von (6.78) sowie (6.27) und (6.28) sind die Abschätzungen (6.77) und (6.79) nicht nur für $t \in J$, sondern sogar für alle $t \in \mathbb{R}$ richtig. Folglich gilt (6.8), sofern $\omega \in [0, 1[$ und $\delta > 0$ die Ungleichungen (6.6) und (6.7) erfüllen. Damit ist der Satz bewiesen. □

§ 7. Der Existenzsatz

Wir beweisen in diesem Paragraphen das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit: die Existenz von Lösungen der Bewegungsgleichungen (WF). Unsere Vorgehensweise besteht darin, von dem Intervall $J = [\sigma, \tau]$ in Satz 6.3 zu einer isoton gegen $\mathbb{R}$ aufsteigenden Folge $\{J_n = [\sigma_n, \tau_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ entsprechender Intervalle überzugehen, und mit Hilfe der zugehörigen Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bedingter Lösungen ϕ_n von (WF) auf J_n eine Lösung von (WF) im eigentlichen Sinne zu konstruieren.

Um bei dem angedeuteten Verfahren die Konvergenz sicherzustellen, benötigen wir bestimmte Schranken an den Verlauf von ϕ_n, die (zumindest ab einem gewissen n_0) von dem Folgenindex $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind. Diese bezüglich n uniformen Abschätzungen werden in den folgenden drei Hilfssätzen bereitgestellt.

7.1 Hilfssatz. *Es seien* $x_{-\infty}, y_{-\infty}, u_{-\infty}, v_{-\infty} \in \mathbb{R}$ *bzw.* $A_{-\infty}, B_{-\infty} \in \big(C^1(]-\infty, 0[)\big)^2$ *wie in Satz 6.3. Weiter sei* $\{J_n = [\sigma_n, \tau_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Intervallen mit*

$$\begin{aligned} &\sigma_{n+1} < \sigma_n, \quad \tau_{n+1} > \tau_n \quad (n \in \mathbb{N}), \\ &\lim_{n\to\infty} \sigma_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty \end{aligned} \tag{7.1}$$

sowie

$$\sigma_1 < -1, \quad A_{-\infty}(\sigma_1) > B_{-\infty}(\sigma_1), \quad -1 < \dot{A}_{-\infty}(\sigma_1) < \dot{B}_{-\infty}(\sigma_1) < 1 \tag{7.2}$$

und

$$\tau_n \geq \sigma_n + \frac{2\Big(x_{-\infty} - y_{-\infty} + (u_{-\infty} - v_{-\infty})\sigma_n\Big)^2}{\min\{\kappa_1, \kappa_2\}\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{7.3}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *schließlich sei* $\phi_n = (a_n, b_n) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ *eine bedingte Lösung von* (WF) *auf* J_n *mit*

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \begin{cases} A_{-\infty}(t) & t \leq \sigma_n \\ a_n(\tau_n) + \dot{a}_n(\tau_n)(t - \tau_n) & t \geq \tau_n, \end{cases} \\ b_n(t) &= \begin{cases} B_{-\infty}(t) & t \leq \sigma_n \\ b_n(\tau_n) + \dot{b}_n(\tau_n)(t - \tau_n) & t \geq \tau_n. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dann gibt es ein $\omega \in [0, 1[$ *und ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\left.\begin{aligned} &|\dot{a}_n(t)|, |\dot{b}_n(t)| \leq \omega < 1, \\ &a_n(t) - b_n(t) \geq \delta > 0 \end{aligned}\right. \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

Beweis. Für

$$\omega_n := \sqrt{1 - \frac{\Big(1 - \max\big\{|u_{-\infty}|, |v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^3}{\left(10 + \dfrac{8\max\{\kappa_1, \kappa_2\}}{A_{-\infty}(\sigma_n) - B_{-\infty}(\sigma_n)}\right)^2}},$$

$$\delta_n := \frac{\kappa_1\Big(1-\max\big\{|u_{-\infty}|,|v_{-\infty}|\big\}^2\Big)^{\frac{3}{2}}}{12+\dfrac{4\kappa_1}{A_{-\infty}(\sigma_n)-B_{-\infty}(\sigma_n)}}$$

gilt nach Satz 6.3

$$\left.\begin{aligned} &|\dot a_n(t)|,|\dot b_n(t)| \le \omega_n < 1, \\ &a_n(t)-b_n(t) \ge \delta_n > 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Wir setzen

$$\omega := \omega_0, \qquad \delta := \delta_0.$$

Aus $\dot A_{-\infty}(\sigma_1)-\dot B_{-\infty}(\sigma_1) < 0$ nach Voraussetzung (7.2) und

$$\ddot A_{-\infty}(t)-\ddot B_{-\infty}(t) = \frac{\eta_1+\eta_2}{t^2} > 0 \quad (t<0) \tag{7.7}$$

gemäß (6.2) folgt mit Voraussetzung (7.1)

$$A_{-\infty}(\sigma_n)-B_{-\infty}(\sigma_n) > A_{-\infty}(\sigma_1)-B_{-\infty}(\sigma_1)$$

und daher

$$\omega = \max_{n\in\mathbb{N}}\omega_n, \qquad \delta = \min_{n\in\mathbb{N}}\delta_n.$$

Mit (7.6) folgt hieraus die Behauptung. □

7.2 Hilfssatz. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 7.1 gibt es ein $t_0<-1$ und ein $n_0\in\mathbb{N}$ derart, daß für alle $t\le t_0$ und alle $n\ge n_0$ $(n\in\mathbb{N})$ gilt:*

$$\begin{aligned} \big|a_n(t)-x_{-\infty}-u_{-\infty}t+\eta_1\ln(-t)\big| &\le k\frac{1}{\sqrt{|t|}}, \\ \big|b_n(t)-y_{-\infty}-v_{-\infty}t-\eta_2\ln(-t)\big| &\le k\frac{1}{\sqrt{|t|}} \end{aligned} \tag{7.8}$$

mit einer von n und t unabhängigen Konstante $k>0$.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist sehr umfangreich. Wir stellen ihn daher an das Ende des Paragraphen zurück und zeigen erst, wie sich unser Hauptresultat ergibt.

7.3 Hilfssatz. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 7.1 sind für jedes $t\in\mathbb{R}$ die Zahlenfolgen $a_n(t)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b_n(t)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß es genügt, die Beschränktheit für irgendein $t \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Ist nämlich die Folge $\{a_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $t' \neq t$, so folgt mit Hilfssatz 7.1

$$|a_n(t')| = \left| a_n(t) + \int_t^{t'} \dot{a}_n(s)ds \right| \leq |a_n(t)| + \omega|t' - t|,$$

und demnach ist auch die Folge $\{a_n(t')\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Analog folgt aus der Beschränktheit von $\{b_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ diejenige von $\{b_n(t')\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Wir wählen $t \leq t_0$, mit t_0 gemäß Hilfssatz 7.2. Dann bestehen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, d.h. für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \big|a_n(t)\big| &\leq \big|x_{-\infty} + u_{-\infty}t - \eta_1 \ln(-t)\big| + k\frac{1}{\sqrt{|t|}}, \\ \big|b_n(t)\big| &\leq \big|y_{-\infty} + v_{-\infty}t + \eta_2 \ln(-t)\big| + k\frac{1}{\sqrt{|t|}}, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite jeweils nicht von n abhängt. Also sind die Zahlenfolgen $a_n(t)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b_n(t)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Wir kommen nun zu unserem zentralen Satz.

7.4 Satz. Gegeben seien $x_{-\infty}, y_{-\infty}, u_{-\infty}, v_{-\infty} \in \mathbb{R}$ mit $-1 < u_{-\infty} < v_{-\infty} < 1$. Dann existiert eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) mit

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} a(t) - \left(x_{-\infty} + u_{-\infty}t - \frac{\kappa_1\big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2} \ln(-t) \right) &= 0, \\ \lim_{t\to-\infty} b(t) - \left(y_{-\infty} + v_{-\infty}t + \frac{\kappa_2\big(1-v_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}}\big(1-u_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2} \ln(-t) \right) &= 0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Beweis. Wie in Hilfssatz 7.1 sei $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge isoton gegen $\mathbb{R}$ aufsteigender Intervalle und $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge bedingter Lösungen ϕ_n von (WF) auf J_n. Daß unter den Bedingungen (7.1)–(7.3) an J_n tatsächlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine bedingte Lösung ϕ_n von (WF) auf J_n mit der Eigenschaft (7.4) existiert, wird durch Satz 6.3 gewährleistet. Wir zeigen zunächst, daß ein Funktionenpaar $\phi = (a,b) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ und eine Teilfoge $\{\phi_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so daß $\phi_n(t)$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $\phi(t)$ konvergiert. Anschließend beweisen wir, daß ϕ eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) ist und das asymptotische Verhalten (7.9) besitzt.

Wir betrachten in dem linearen Raum $C(J_1, \mathbb{R}^4)$ die Folge

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad f_n = \left(f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}, f_n^{(4)}\right) \in C(J_1, \mathbb{R}^4),$$

definiert durch

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}(t) &:= a_n(t), \quad f_n^{(2)}(t) := \dot{a}_n(t), \\ f_n^{(3)}(t) &:= b_n(t), \quad f_n^{(4)}(t) := \dot{b}_n(t) \end{aligned} \qquad (t \in J_1).$$

Bezüglich der gemäß

$$\|f\|_{C(J_1,\mathbb{R}^4)} := \sup_{t\in J_1} \sum_{i=1}^{4} \left|f^{(i)}(t)\right|, \quad f = \left(f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}\right) \in C(J_1, \mathbb{R}^4), \tag{7.10}$$

gegebenen Norm $\|\cdot\|_{C(J_1,\mathbb{R}^4)}$ ist $C(J_1, \mathbb{R}^4)$ ein Banach-Raum. Wir zeigen, daß die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichförmig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Zunächst zur gleichförmigen Beschränktheit. Nach Hilfssatz 7.3 ist die Zahlenfolge $\{a_n(\sigma_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, etwa gemäß $|a_n(\sigma_1)| \le C_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein (von n unabhängiges) $C_1 > 0$. Wegen Hilfssatz 7.1 gilt daher

$$|a_n(t)| = \left|a_n(\sigma_1) + \int_{\sigma_1}^{t} \dot{a}_n(s)ds\right| \le C_1 + \int_{\sigma_1}^{t} |\dot{a}_n(s)|ds \le C_1 + \omega(\tau_1 - \sigma_1)$$

für alle $t \in J_1 = [\sigma_1, \tau_1]$. Analog gilt auch

$$|b_n(t)| \le C_2 + \omega(\tau_1 - \sigma_1)$$

für alle $t \in J_1$, $n \in \mathbb{N}$ und ein (von n unabhängiges) $C_2 > 0$. Zusammen mit Hilfssatz 7.1 erhalten wir also

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{C(J_1,\mathbb{R}^4)} &= \sup_{t\in J_1} \left(|a_n(t)| + |\dot{a}_n(t)| + |b_n(t)| + |\dot{b}_n(t)|\right) \\ &\le C_1 + \omega(\tau_1 - \sigma_1) + \omega + C_2 + \omega(\tau_1 - \sigma_1) + \omega \\ &\le C_1 + C_2 + 2(\tau_1 - \sigma_1) + 2, \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichförmig beschränkt.

Nun kommen wir zum Beweis der gleichgradigen Stetigkeit von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\phi_n = (a_n, b_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ bedingte Lösung der Gleichung (WF) auf J_n ist, gilt

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n(t) = \frac{1}{2}\kappa_1\left(1 - \dot{a}_n(t)^2\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg[& \frac{1 + \dot{b}_n\left(l_{a,n}^-(t)\right)}{1 - \dot{b}_n\left(l_{a,n}^-(t)\right)} \frac{1}{\left(a_n(t) - b_n\left(l_{a,n}^-(t)\right)\right)^2} \\ & + \frac{1 - \dot{b}_n\left(l_{a,n}^+(t)\right)}{1 + \dot{b}_n\left(l_{a,n}^+(t)\right)} \frac{1}{\left(a_n(t) - b_n\left(l_{a,n}^+(t)\right)\right)^2} \Bigg] \end{aligned}$$

für alle $t \in J_n$. Mit Hilfssatz 7.1 und Hilfssatz 5.1 folgt hieraus

$$\begin{aligned}
0 < \ddot{a}_n(t) &< \frac{1}{2}\kappa_1 \Bigg[\frac{2}{1-\omega} \frac{1}{\big(a_n(t) - b_n\big(l^-_{a,n}(t)\big)\big)^2} \\
&\qquad + \frac{2}{1-\omega} \frac{1}{\big(a_n(t) - b_n\big(l^+_{a,n}(t)\big)\big)^2} \Bigg] \\
&< \frac{1}{2}\kappa_1 \left[\frac{2}{1-\omega} \left(\frac{2}{a_n(t) - b_n(t)} \right)^2 + \frac{2}{1-\omega} \left(\frac{2}{a_n(t) - b_n(t)} \right)^2 \right] \\
&\le \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\delta^2}
\end{aligned}$$

für alle $t \in J_n$. Gemäß (7.4) und (6.2) gilt weiterhin

$$0 < \ddot{a}_n(t) = \frac{\eta_1}{|t|^2} \le \frac{\eta_1}{|\sigma_n|^2} \le \frac{\eta_1}{|\sigma_1|^2}$$

für $t < \sigma_n$ sowie $\ddot{a}_n(t) = 0$ für $t > \tau_n$. Insgesamt gilt also

$$|\dot{a}_n(t) - \dot{a}_n(t')| \le \left(\frac{\eta_1}{\sigma_1^2} + \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\delta^2} \right) |t - t'| \quad (t, t' \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}). \tag{7.11}$$

Analog zeigt man

$$|\dot{b}_n(t) - \dot{b}_n(t')| \le \left(\frac{\eta_2}{\sigma_1^2} + \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)\delta^2} \right) |t - t'| \quad (t, t' \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}). \tag{7.12}$$

Zusammen mit Hilfssatz 7.1 folgt daher

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \left| f_n^{(i)}(t) - f_n^{(i)}(t') \right| &= |a_n(t) - a_n(t')| + |\dot{a}_n(t) - \dot{a}_n(t')| \\
&\quad + |b_n(t) - b_n(t')| + |\dot{b}_n(t) - \dot{b}_n(t')| \\
&\le \omega|t - t'| + \left(\frac{\eta_1}{\sigma_1^2} + \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\delta^2} \right) |t - t'| \\
&\quad + \omega|t - t'| + \left(\frac{\eta_2}{\sigma_1^2} + \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)\delta^2} \right) |t - t'| \\
&\le \left(2 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sigma_1^2} + \frac{8(\kappa_1 + \kappa_2)}{(1-\omega)\delta^2} \right) |t - t'|
\end{aligned}$$

für alle $t, t' \in J_1$ und alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig stetig.

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt aus der gleichförmigen Beschränktheit und der gleichgradigen Stetigkeit, daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(J_1, \mathbb{R}^4)$ eine konvergente Teilfolge $\{f_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt. Dies bedeutet: $a_{p_n}(t)$, $\dot{a}_{p_n}(t)$, $b_{p_n}(t)$ und $\dot{b}_{p_n}(t)$ konvergieren gleichmäßig auf J_1. Als nächstes betrachten wir in dem linearen Raum $C(J_2, \mathbb{R}^4)$ die Folge

$$\{g_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad g_{p_n} = \left(g^{(1)}_{p_n}, g^{(2)}_{p_n}, g^{(3)}_{p_n}, g^{(4)}_{p_n}\right) \in C(J_2, \mathbb{R}^4),$$

definiert durch

$$\left.\begin{aligned} g^{(1)}_{p_n}(t) &:= a_{p_n}(t), \quad & g^{(2)}_{p_n}(t) &:= \dot{a}_{p_n}(t), \\ g^{(3)}_{p_n}(t) &:= b_{p_n}(t), \quad & g^{(4)}_{p_n}(t) &:= \dot{b}_{p_n}(t) \end{aligned}\right. \qquad (t \in J_2),$$

wobei $C(J_2, \mathbb{R}^4)$ in Analogie zu (7.10) mit der Norm $\|\cdot\|_{C(J_2,\mathbb{R}^4)}$ versehen sei. Eine analoge Argumentation wie bei der Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt, daß $\{g_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichförmig beschränkt und gleichgradig stetig ist und daher nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine konvergente Teilfolge $\{g_{q_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt. Dies bedeutet: $a_{q_n}(t)$, $\dot{a}_{q_n}(t)$, $b_{q_n}(t)$ und $\dot{b}_{q_n}(t)$ konvergieren gleichmäßig auf J_2. Dabei stellen also die q_n eine Teilfolge der p_n dar. Die wiederum gleichförmig beschränkte und gleichgradig stetige, durch

$$h_{q_n}(t) := \left(a_{q_n}(t), \dot{a}_{q_n}(t), b_{q_n}(t), \dot{b}_{q_n}(t)\right) \qquad (t \in J_3)$$

erklärte Folge $\{h_{q_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(J_3, \mathbb{R}^4)$ hat ihrerseits eine konvergente Teilfolge $\{h_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. $a_{r_n}(t)$, $\dot{a}_{r_n}(t)$, $b_{r_n}(t)$ und $\dot{b}_{r_n}(t)$ konvergieren gleichmäßig auf J_3. Durch Fortsetzung dieses Prozesses erhält man eine Reihe von Folgen nach dem Schema

$$\begin{array}{ll} a_{p_1}(t),\ a_{p_2}(t),\ a_{p_3}(t),\ a_{p_4}(t),\ \ldots & \text{gleichmäßig konvergent auf } J_1, \\ a_{q_1}(t),\ a_{q_2}(t),\ a_{q_3}(t),\ a_{q_4}(t),\ \ldots & \text{gleichmäßig konvergent auf } J_2, \\ a_{r_1}(t),\ a_{r_2}(t),\ a_{r_3}(t),\ a_{r_4}(t),\ \ldots & \text{gleichmäßig konvergent auf } J_3, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \end{array}$$

und entsprechend für $\dot{a}$, b und $\dot{b}$ anstatt a. Die m-te Zeile stellt eine Teilfolge der $(m-1)$-ten Zeile dar. Sie konvergiert gleichmäßig auf J_m. Daraus ergibt sich, daß die Diagonalfolge

$$a_{p_1}(t),\ a_{q_2}(t),\ a_{r_3}(t),\ \ldots$$

auf jedem Intervall J_m gleichmäßig konvergent ist. Sie ist nämlich, jedenfalls von ihrem m-ten Glied an, eine Teilfolge der m-ten Zeile ($m \in \mathbb{N}$). Damit haben wir gezeigt: es gibt eine Teilfolge $\{\phi_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$\phi_{n_1} = \phi_{p_1}, \quad \phi_{n_2} = \phi_{q_2}, \quad \phi_{n_3} = \phi_{r_3}, \quad \ldots,$$

so daß $a_{n_\nu}(t)$, $\dot a_{n_\nu}(t)$, $b_{n_\nu}(t)$ und $\dot b_{n_\nu}(t)$ im Limes $\nu \to \infty$ auf jedem J_m ($m \in \mathbb{N}$) gleichmäßig konvergieren. Da $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine isoton gegen $\mathbb{R}$ aufstrebende Folge von Intervallen ist, jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ also Teilmenge eines J_m ist, konvergieren $a_{n_\nu}(t)$, $\dot a_{n_\nu}(t)$, $b_{n_\nu}(t)$ und $\dot b_{n_\nu}(t)$ im Limes $\nu \to \infty$ sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$a(t) := \lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu}(t), \quad b(t) := \lim_{\nu\to\infty} b_{n_\nu}(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{7.13}$$

Da die Ableitungen ebenfalls konvergieren, und zwar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$, gilt nach dem Satz über gliedweise Differentiation $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$\dot a(t) := \lim_{\nu\to\infty} \dot a_{n_\nu}(t), \quad \dot b(t) := \lim_{\nu\to\infty} \dot b_{n_\nu}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Nun zeigen wir, daß das so gewonnene Funktionenpaar $\phi = (a, b) \in \big(C^1(\mathbb{R})\big)^2$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF) ist.

Zunächst sei festgehalten, daß wegen Hilfssatz 7.1

$$|\dot a(t)|, |\dot b(t)| \le \omega < 1, \quad a(t) - b(t) \ge \delta > 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Nach Korollar 4.7 ist folglich für $\phi = (a, b)$ die rechte Seite in (WF) auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Insbesondere sind die Lichtkegelfunktionen von ϕ erklärt, d.h. zu jedem $t \in \mathbb{R}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ und $l_2^+(t)$, welche die Gleichungen (3.1) erfüllen. Wir zeigen nun, daß auch $l_{1,n_\nu}^-(t)$, $l_{1,n_\nu}^+(t)$, $l_{2,n_\nu}^-(t)$ bzw. $l_{2,n_\nu}^+(t)$ im Limes $\nu \to \infty$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $l_1^-(t)$, $l_1^+(t)$, $l_2^-(t)$ bzw. $l_2^+(t)$ konvergieren. Stellvertretend führen wir den Beweis für $l_{1,n_\nu}^-(t)$. Gemäß (4.22) und wegen Hilfssatz 7.1 gilt

$$\begin{aligned}
&\big|l_{1,n_\nu}^-(t) - l_1^-(t)\big| \\
&\quad = \big|t - a_{n_\nu}(t) + b_{n_\nu}\big(l_{1,n_\nu}^-(t)\big) - t + a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big| \\
&\quad \le \big|a_{n_\nu}(t) - a_(t)\big| + \big|b_{n_\nu}\big(l_{1,n_\nu}^-(t)\big) - b_{n_\nu}\big(l_1^-(t)\big)\big| + \big|b_{n_\nu}\big(l_1^-(t)\big) - b\big(l_1^-(t)\big)\big| \\
&\quad \le \big|a_{n_\nu}(t) - a_(t)\big| + \omega\big|l_{1,n_\nu}^-(t) - l_1^-(t)\big| + \big|b_{n_\nu}\big(l_1^-(t)\big) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|
\end{aligned}$$

und folglich

$$\big|l_{1,n_\nu}^-(t) - l_1^-(t)\big| \le \frac{\big|a_{n_\nu}(t) - a(t)\big| + \big|b_{n_\nu}\big(l_1^-(t)\big) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}{1-\omega} \tag{7.14}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Auf K konvergiert $a_{n_\nu}(t)$ gleichmäßig gegen $a(t)$. Wegen der Stetigkeit von l_1^- ist mit K auch die Menge $l_1^-(K)$ kompakt, und $b_{n_\nu}(t)$ konvergiert auf $l_1^-(K)$ gleichmäßig gegen $b(t)$. Demnach ergibt sich aus (7.14), daß $l_{1,n_\nu}^-(t)$ auf K im Limes $\nu \to \infty$ gleichmäßig gegen $l_1^-(t)$ konvergiert.

Schließlich müssen wir noch sicherstellen, daß auch verkettete Ausdrücke, wie zum Beispiel

$$b_{n_\nu}\big(l^-_{1,n_\nu}(t)\big), \quad \dot b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(t)\big), \quad \dot a_{n_\nu}\big(l^-_{2,n_\nu}(t)\big),$$

auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergieren. Wir zeigen dies exemplarisch für $\dot b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(t)\big)$. Wegen (7.12) gilt

$$\begin{aligned}
&\big|\dot b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(t)\big) - \dot b\big(l^+_1(t)\big)\big| \\
&\quad\le \big|\dot b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(t)\big) - \dot b_{n_\nu}\big(l^+_1(t)\big)\big| + \big|\dot b_{n_\nu}\big(l^+_1(t)\big) - \dot b\big(l^+_1(t)\big)\big| \qquad (7.15)\\
&\quad\le \left(\frac{\eta_2}{\sigma_1^2} + \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)\delta^2}\right)\big|l^+_{1,n_\nu}(t) - l^+_1(t)\big| + \big|\dot b_{n_\nu}\big(l^+_1(t)\big) - \dot b\big(l^+_1(t)\big)\big|
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Es sei wieder K eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Da $l^+_{1,n_\nu}(t)$ auf K gleichmäßig gegen $l^+_1(t)$ und $b_{n_\nu}(t)$ auf $l^+_1(K)$ gleichmäßig gegen $b(t)$ konvergiert, folgt aus (7.15), daß $b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(t)\big)$ auf K im Limes $\nu \to \infty$ gleichmäßig gegen $b\big(l^+_1(t)\big)$ konvergiert.

Nun seien $t, t' \in \mathbb{R}$ mit $t' < t$ beliebig. Wir setzen $K := [t', t]$. K ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Da die Intervallfolge $\{J_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ isoton gegen $\mathbb{R}$ aufstrebt, gibt es ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset J_{n_\nu}$ für alle $\nu \ge \nu_0$. Weil für alle $\nu \in \mathbb{N}$ zudem $\phi_{n_\nu} = (a_{n_\nu}, b_{n_\nu})$ eine bedingte Lösung von (WF) auf J_{n_ν} ist, folgt aus (WF) durch Integration

$$\begin{aligned}
\dot a_{n_\nu}(t) = \dot a_{n_\nu}(t') + \int_{t'}^{t} &\frac12 \kappa_1\big(1 - \dot a_{n_\nu}(s)^2\big)^{\frac32} \\
&\times \left[\frac{1 + \dot b_{n_\nu}\big(l^-_{1,n_\nu}(s)\big)}{1 - \dot b_{n_\nu}\big(l^-_{1,n_\nu}(s)\big)} \frac{1}{\Big(a_{n_\nu}(s) - b_{n_\nu}\big(l^-_{1,n_\nu}(s)\big)\Big)^2} \right.\\
&\left. + \frac{1 - \dot b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(s)\big)}{1 + \dot b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(s)\big)} \frac{1}{\Big(a_{n_\nu}(s) - b_{n_\nu}\big(l^+_{1,n_\nu}(s)\big)\Big)^2} \right] ds
\end{aligned}$$

für alle $\nu \ge \nu_0$. Im Limes $\nu \to \infty$ konvergiert $\dot a_{n_\nu}(t)$ gegen $\dot a(t)$ und $\dot a_{n_\nu}(t')$ gegen $\dot a(t')$. Ferner konvergiert der (bezüglich s stetige) Integrand für alle $s \in K$ gleichmäßig gegen

$$\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1+\dot b\big(l_1^-(s)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)}{1+\dot b\big(l_1^+(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right].$$

Nach dem Satz über gliedweise Integration können wir daher Limesbildung und Integration vertauschen, so daß sich

$$\dot a(t)=\dot a(t')+\int\limits_{t'}^{t}\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1+\dot b\big(l_1^-(s)\big)}{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)}{1+\dot b\big(l_1^+(s)\big)}\frac{1}{\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right]ds$$

ergibt. Auf analoge Weise zeigt man die Gültigkeit der Gleichung

$$\dot b(t)=\dot b(t')-\int\limits_{t'}^{t}\frac{1}{2}\kappa_2\big(1-\dot b(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1-\dot a\big(l_2^-(s)\big)}{1+\dot a\big(l_2^-(s)\big)}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(s)\big)-b(s)\Big)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1+\big(l_2^+(s)\big)}{1-\dot a\big(l_2^+(s)\big)}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(s)\big)-b(s)\Big)^2}\right]ds.$$

Da t und t' beliebig waren, folgt $\dot a,\dot b\in C^1(\mathbb{R})$, und durch Differentiation nach t erhalten wir, daß a und b in ganz $\mathbb{R}$ der Gleichung (WF) genügen. Wir haben also bewiesen: $\phi=(a,b)$ ist eine Lösung der Bewegungsgleichungen (WF).

Es verbleibt nur noch zu zeigen, daß a und b das asymptotische Verhalten (7.9) aufweisen. Nach Hilfssatz 7.2 und (7.13) gilt

$$\big|a(t)-x_{-\infty}-u_{-\infty}t+\eta_1\ln(-t)\big|\le k\frac{1}{\sqrt{|t|}},$$
$$\big|b(t)-y_{-\infty}-v_{-\infty}t-\eta_2\ln(-t)\big|\le k\frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

für alle $t\le t_0$, und hieraus folgt wegen (6.1) die Behauptung (7.9). Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir müssen jetzt noch den Beweis von Hilfssatz 7.2 nachtragen. Hierzu benötigen wir den folgenden weiteren Hilfssatz.

7.5 Hilfssatz. *Es seien $x_{-\infty}, y_{-\infty}, u_{-\infty}, v_{-\infty}, A_{-\infty}, B_{-\infty}$ und J wie in Satz 6.3. Ferner sei $\phi = (a,b)$ eine bedingte Lösung von* (WF) *auf J mit* (6.5) *und* (6.8). *Man setze*

$$\mu := \frac{1}{2}(u_{-\infty} - v_{-\infty}) < 0, \tag{7.16}$$

$$\widetilde{k} := \frac{2488(1+\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2\big(1+|x_{-\infty}-y_{-\infty}|\big)}{(1-\omega)^5|\mu|^5}, \tag{7.17}$$

$$k := \frac{1785(1+\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^3\left(\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right) + |x_{-\infty}-y_{-\infty}| + \widetilde{k}\right)}{(1-\omega)^5|\mu|^5}. \tag{7.18}$$

Ein $t_0 \in]-\infty,-1[$ habe die Eigenschaften

(a) $$x_{-\infty} - y_{-\infty} + \mu t_0 - (\eta_1+\eta_2)\ln(-t_0) > 0, \quad \mu - (\eta_1+\eta_2)\frac{1}{t_0} < 0, \tag{7.19}$$

(b) $$t_0 \leq -\frac{32\max\{\kappa_1,\kappa_2\}}{(1-\omega)^3\mu^2}, \quad t_0 \leq \frac{2}{\mu}, \tag{7.20}$$

(c) $$\ln(|t_0|) \geq 2, \quad \frac{\ln(|t_0|)}{\sqrt{|t_0|}} \leq 1, \tag{7.21}$$

(d) $$\frac{\ln\left(\frac{|\mu||t_0|}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t_0|}} \leq 1, \quad \frac{\ln\left(\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|t_0|}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t_0|}} \leq 1, \tag{7.22}$$

(e) $$-\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{\sqrt{|t_0|}} + |\mu|\sqrt{|t_0|} - (\eta_1+\eta_2)\frac{\ln(|t_0|)}{\sqrt{|t_0|}} - 2k\frac{1}{|t_0|} > 0, \tag{7.23}$$

(f) $$\mu + \frac{8(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)\mu^2}\frac{1}{|t_0|} < 0. \tag{7.24}$$

(*Hierzu muß t_0 lediglich genügend klein sein.*) *Ist dann $\sigma < t_0 < \tau$, so gilt*

$$a(t) - b(t) > \mu t, \quad \dot{a}(t) - \dot{b}(t) < \mu \qquad \textit{für alle } t \leq \sigma, \tag{7.25}$$

und in jedem Intervall $[\sigma, t^*]$ *mit* $\sigma < t^* \leq t_0$, *in dem*

$$a(t) - b(t) \geq \mu t, \quad \dot{a}(t) - \dot{b}(t) \leq \mu \qquad \textit{für alle } t \in [\sigma, t^*] \tag{7.26}$$

gilt, bestehen auch folgende Abschätzungen:

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} u_{-\infty} < \dot{a}(t) &< u_{-\infty} - \eta_1 \frac{1}{\sigma} - \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\mu^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right), \\ v_{-\infty} > \dot{b}(t) &> v_{-\infty} + \eta_2 \frac{1}{\sigma} + \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)\mu^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right), \end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} \dot{b}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) &< \frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t}, \\ \dot{a}\big(l_2^+(t)\big) - \dot{a}(t) &< \frac{16\kappa_1}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t}, \end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\text{(iii)} \qquad \begin{aligned} \dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big) \leq \mu, &\quad \dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) \leq \frac{\mu}{2}, \\ \dot{a}\big(l_2^-(t)\big) - \dot{b}(t) \leq \mu, &\quad \dot{a}\big(l_2^+(t)\big) - \dot{b}(t) \leq \frac{\mu}{2}, \end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\text{(iv)} \qquad \begin{aligned} \Bigg| \, & a(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty} t - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2}{1 - v_{-\infty}^2}\right) \\ & + \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot{a}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \\ & \quad \times \Bigg[\frac{1 - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} \ln\Big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big) \\ & \qquad + \frac{1 - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} \ln\Big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big) \Bigg] \Bigg| \leq \widetilde{k} \frac{1}{\sqrt{|t|}}, \end{aligned} \tag{7.30}$$

$$
\begin{aligned}
\Bigg| \; & b(t) - y_{-\infty} - v_{-\infty} t + \frac{1}{2}\eta_2 \ln\left(\frac{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2}{1 - u_{-\infty}^2}\right) \\
& + \frac{1}{2}\kappa_2 \big(1 - \dot{b}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \\
& \qquad \times \Bigg[\; \frac{1 - \dot{a}\big(l_2^-(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}\big(l_2^-(t)\big) - \dot{b}(t)\Big)^2} \ln\Big(a\big(l_2^-(t)\big) - b(t)\Big) \\
& \qquad\quad + \frac{1 - \dot{a}\big(l_2^+(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}\big(l_2^+(t)\big) - \dot{b}(t)\Big)^2} \ln\Big(a\big(l_1^+(t)\big) - b(t)\Big) \; \Bigg] \Bigg| \le \widetilde{k} \frac{1}{\sqrt{|t|}},
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

(v)

$$
\big|a(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty} t + \eta_1 \ln(-t)\big| \le k \frac{1}{\sqrt{|t|}}, \tag{7.32}
$$

$$
\big|b(t) - y_{-\infty} - v_{-\infty} t - \eta_2 \ln(-t)\big| \le k \frac{1}{\sqrt{|t|}}, \tag{7.33}
$$

(vi)

$$
a(t) - b(t) > \mu t, \quad \dot{a}(t) - \dot{b}(t) < \mu \tag{7.34}
$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$.

Beweis. Wir nehmen an, daß ein $t_0 \in]-\infty, 0[$ den Eigenschaften (a)–(f) genügt und daß $\sigma < t_0 < \tau$ gilt. Zunächst zeigen wir, daß hieraus die Gültigkeit der Ungleichungen (7.25) für alle $t \le \sigma$ folgt, also in jenem Bereich der reellen Achse, wo $a(t)$ und $b(t)$ nicht der Dynamik (WF) unterliegen, sondern den fest vorgegebenen $A_{-\infty}(t)$ und $B_{-\infty}(t)$ entsprechen. Anschließend wählen wir ein beliebiges, aber festes $t^* \in \mathbb{R}$ mit $\sigma < t^* \le t_0$ aus, welches die Eigenschaft besitzt, daß im Intervall $[\sigma, t^*]$ die Ungleichungen (7.26) gelten. $\big($Wegen (7.25) und $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ existiert ein solches t^*.$\big)$ Wir zeigen dann, daß für $t \in [\sigma, t^*]$ die Abschätzungen (i)–(vi) bestehen, und zwar indem wir ausnutzen, daß $\phi = (a, b)$ als bedingte Lösung im Intervall $J = [\sigma, \tau]$ die Gleichungen (WF) erfüllt.

Vorab sei zum leichteren Verständnis der Beweisschritte an die Vorzeichen der in den Ungleichungen auftretenden Konstanten erinnert: es gilt

$$
\kappa_1, \kappa_2, \eta_1, \eta_2 > 0, \qquad \mu < 0, \qquad \sigma, t^*, t_0 < 0. \tag{7.35}
$$

Man beachte weiterhin, daß für $t \le t^* < 0$ stets $\mu t > 0$ gilt.

Es sei also $\sigma < t_0 < \tau$. Als erstes beweisen wir die Gültigkeit von (7.25). Gemäß (6.5), (6.2) und (7.16) gilt

$$\begin{aligned} a(t) - b(t) &= A_{-\infty}(t) - B_{-\infty}(t) \\ &= x_{-\infty} - y_{-\infty} + (u_{-\infty} - v_{-\infty})t - (\eta_1 + \eta_2)\ln(-t) \\ &= \mu t + x_{-\infty} - y_{-\infty} + \mu t - (\eta_1 + \eta_2)\ln(-t) \end{aligned} \tag{7.36}$$

für alle $t \leq \sigma$. Der Term $\mu t - (\eta_1 + \eta_2)\ln(-t)$ ist für $t \leq t_0$ streng monoton fallend, denn (7.19) zufolge gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(\mu t - (\eta_1 + \eta_2)\ln(-t)\Big) = \mu - (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{t} \leq \mu - (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{t_0} < 0 \tag{7.37}$$

für alle $t \leq t_0$. Wegen $\sigma < t_0$ ergibt sich demnach aus (7.36)

$$a(t) - b(t) > \mu t + x_{-\infty} - y_{-\infty} + \mu t_0 - (\eta_1 + \eta_2)\ln(-t_0)$$

für alle $t \leq \sigma$, und mit (7.19) impliziert dies

$$a(t) - b(t) > \mu t \qquad \text{für alle } t \leq \sigma. \tag{7.38}$$

Wegen $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \dot a(t) - \dot b(t) &= \dot A_{-\infty}(t) - \dot B_{-\infty}(t) \\ &= u_{-\infty} - v_{-\infty} - (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{t} \\ &= \mu + \left(\mu - (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

für alle $t \leq \sigma$, woraus mit (7.37) und $\sigma < t_0$

$$\dot a(t) - \dot b(t) < \mu \qquad \text{für alle } t \leq \sigma \tag{7.39}$$

folgt. Die Ungleichungen (7.38) und (7.38) zusammen entsprechen der Behauptung (7.25).

Nun sei nach wie vor $\sigma < t_0 < \tau$, und für ein $t^* \in \mathbb{R}$ mit $\sigma < t^* \leq t_0$ gelte (7.26). Wir zeigen anhand der Gültigkeit der Bewegungsgleichungen (WF) im Intervall $J = [\sigma, \tau]$, daß für $t \in [\sigma, t^*]$ die Abschätzungen (i)–(vi) bestehen.

(i) Gemäß (6.5) und (6.2) gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \dot a(t) &= \lim_{t\to-\infty} \dot A_{-\infty}(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(u_{-\infty} - \eta_1\frac{1}{t}\right) = u_{-\infty}, \\ \lim_{t\to-\infty} \dot b(t) &= \lim_{t\to-\infty} \dot B_{-\infty}(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(v_{-\infty} + \eta_2\frac{1}{t}\right) = v_{-\infty} \end{aligned} \tag{7.40}$$

sowie

$$\ddot{a}(t) = A_{-\infty}(t) = \frac{\eta_1}{t^2} > 0, \quad \ddot{b}(t) = B_{-\infty}(t) = -\frac{\eta_2}{t^2} > 0 \quad \text{für } t < \sigma. \tag{7.41}$$

Da $\phi = (a, b)$ bedingte Lösung von (WF) auf $J = [\sigma, \tau]$ ist, a und b also für $t \in J$ die Bewegungsgleichungen (WF) erfüllen, trifft $\ddot{a}(t) > 0$, $\ddot{b}(t) < 0$ auch für alle $t \in [\sigma, \tau]$ zu. Nach (6.5) gilt zudem $\ddot{a}(t) = \ddot{b}(t) = 0$ für $t > \tau$ und somit

$$\ddot{a}(t) \geq 0, \quad \ddot{b}(t) \leq 0 \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{7.42}$$

d.h. $\dot{a}$ bzw. $\dot{b}$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ monoton $\big($und auf $]-\infty, \tau]$ sogar streng monoton$\big)$ wachsend bzw. fallend.

Es sei bemerkt, daß wir mit $\ddot{a}(\sigma)$, $\ddot{b}(\sigma)$ bzw. $\ddot{a}(\tau)$, $\ddot{b}(\tau)$ hier und im folgenden stets die rechts- bzw. linksseitige zweite Ableitung bezeichnen, da die zweite Ableitung selbst im allgemeinen bei σ und τ nicht existiert. Mit dieser Bezeichnungsweise sind die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärten Funktionen $\ddot{a}$ und $\ddot{b}$ dann stückweise stetig und insbesondere auf jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbar.

Aus (7.40)–(7.42) folgt

$$u_{-\infty} < \dot{a}(t), \quad v_{-\infty} > \dot{b}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{7.43}$$

d.h. in (7.27) bleibt zu zeigen:

$$\left.\begin{aligned} \dot{a}(t) &< u_{-\infty} - \eta_1 \frac{1}{\sigma} - \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\mu^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right), \\ \dot{b}(t) &> v_{-\infty} + \eta_2 \frac{1}{\sigma} + \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)\mu^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right) \end{aligned}\right\} \quad \big(t \in [\sigma, t^*]\big).$$

Wir können uns auf den Beweis der Ungleichung für $\dot{a}(t)$ beschränken, diejenige für $\dot{b}(t)$ beweist man vollkommen analog.

Aus der Gültigkeit der Gleichungen (WF) für $t \in [\sigma, \tau]$ und aus $\ddot{a}(t) = 0$ für $t > \tau$ ergibt sich durch Integration

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) \leq \dot{a}(\sigma) + \int_\sigma^t \frac{1}{2}\kappa_1 \Big(1 - \dot{a}(s)^2\Big)^{\frac{3}{2}} \Bigg[& \frac{1 + \dot{b}\big(l_1^-(s)\big)}{1 - \dot{b}\big(l_1^-(s)\big)} \frac{1}{\Big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2} \\ & + \frac{1 - \dot{b}\big(l_1^+(s)\big)}{1 + \dot{b}\big(l_1^+(s)\big)} \frac{1}{\Big(a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2} \Bigg] ds \end{aligned} \tag{7.44}$$

für alle $t \geq \sigma$, denn der Integrand ist aufgrund von (6.8) nach Korollar 4.7 auch für $s > \tau$ wohldefiniert und zudem positiv. Es besteht Gleichheit im Falle

$t \in [\sigma, \tau]$ und Ungleichheit im Falle $t > \tau$. Mit (6.8) und Hilfssatz 5.1 folgt

$$\begin{aligned}
\dot{a}(t) \;&<\; \dot{a}(\sigma) + \frac{1}{2}\kappa_1 \int\limits_\sigma^t \left[\frac{2}{1-w} \frac{1}{\big(a(s) - b\big(l_1^-(s)\big)\big)^2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{2}{1-w} \frac{1}{\big(a(s) - b\big(l_1^+(s)\big)\big)^2} \right] ds, \\
&< \dot{a}(\sigma) + \frac{\kappa_1}{1-w} \int\limits_\sigma^t \left[\left(\frac{2}{a(s) - b(s)} \right)^2 + \left(\frac{2}{a(s) - b(s)} \right)^2 \right] ds, \\
&= \dot{a}(\sigma) + \frac{8\kappa_1}{1-w} \int\limits_\sigma^t \frac{1}{\big(a(s) - b(s)\big)^2} ds.
\end{aligned}$$

Nun machen wir Gebrauch von (7.26) und erhalten

$$\dot{a}(t) < \dot{a}(\sigma) + \frac{8\kappa_1}{1-w} \int\limits_\sigma^t \frac{1}{(\mu s)^2} ds < \dot{a}(\sigma) - \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\mu^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma} \right)$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Mit (6.5), (6.2) und wegen $a \in C^1(\mathbb{R})$ ergibt sich schließlich

$$\dot{a}(t) < u_{-\infty} - \eta_1 \frac{1}{\sigma} - \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)\mu^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma} \right) \qquad \big(t \in [\sigma, t^*]\big).$$

Damit ist (i) bewiesen.

(ii) Da b zusammen mit a im Intervall $J = [\sigma, \tau]$ die Gleichungen (WF) erfüllt, gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} \frac{\dot{b}(t)}{\sqrt{1 - \dot{b}(t)^2}} \;&=\; \frac{1}{2}\kappa_2 \left[\frac{1 - \dot{a}\big(l_2^-(t)\big)}{1 + \dot{a}\big(l_2^-(t)\big)} \frac{1}{\big(a\big(l_2^-(t)\big) - b(t)\big)^2} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1 + \dot{a}\big(l_2^+(t)\big)}{1 - \dot{a}\big(l_2^+(t)\big)} \frac{1}{\big(a\big(l_2^+(t)\big) - b(t)\big)^2} \right] \quad \text{für } t \in J.
\end{aligned}$$

Beachtet man, daß die rechte Seite dieser Gleichung (mit einer Begründung wie beim Integranden in (7.44)) auch für $t > \tau$ erklärt sowie stets positiv ist, und daß wegen (6.5)

$$-\frac{d}{dt}\frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}} = 0 \quad \text{für } t > \tau$$

gilt, so ergibt sich durch Integration

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}} - \frac{\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\sqrt{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}} \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\kappa_2 \int_t^{l_1^+(t)} \Bigg[\frac{1-\dot a\big(l_2^-(s)\big)}{1+\dot a\big(l_2^-(s)\big)} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(s)\big)-b(s)\Big)^2} \\
&\qquad\qquad + \frac{1+\dot a\big(l_2^+(s)\big)}{1-\dot a\big(l_2^+(s)\big)} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(s)\big)-b(s)\Big)^2} \Bigg] ds,
\end{aligned} \tag{7.45}$$

für alle $t \ge \sigma$, wobei die Gleichheit im Falle $l_1^+(t) \le \tau$ und die Ungleichheit im Falle $l_1^+(t) > \tau$ besteht. Nun sei $t \in [\sigma, t^*]$ beliebig, aber fest. Wir schätzen für $s \in [t, l_1^+(t)]$ den Integranden ab. Da l_2^- dem Satz 4.2 zufolge streng monoton wachsend ist mit $l_2^-\big(l_1^+(t)\big) = t$, ergeben (7.42) und der Mittelwertsatz

$$a\big(l_2^-(s)\big) \ge a(t) - \dot a(t)\big(t - l_2^-(s)\big)$$

und folglich

$$\begin{aligned}
a\big(l_2^-(s)\big) - b(s) &\ge a(t) - \dot a(t)\big(t - l_2^-(s)\big) - b(s) \\
&= a(t) + \dot a(t)(s-t) - \dot a(t)\big(s - l_2^-(s)\big) - b(s)
\end{aligned}$$

für alle $s \in [t, l_1^+(t)]$. Gemäß den Bestimmungsgleichungen (4.22) der Lichtkegelfunktionen ergibt sich hieraus

$$a\big(l_2^-(s)\big) - b(s) \ge a(t) + \dot a(t)(s-t) - \dot a(t)\Big(a\big(l_2^-(s)\big) - b(s)\Big) - b(s)$$

und somit

$$a\big(l_2^-(s)\big) - b(s) \ge \frac{a(t) + \dot a(t)(s-t) - b(s)}{1+\dot a(t)} \quad \big(s \in [t, l_1^+(t)]\big). \tag{7.46}$$

Wegen (7.42) gilt weiterhin $\dot b(s) \ge \dot b\big(l_1^+(t)\big)$ und daher mit dem Mittelwertsatz

$$b(s) \le b\big(l_1^+(t)\big) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big(l_1^+(t) - s\big) \quad \big(s \in [t, l_1^+(t)]\big).$$

Wir setzen dies in (7.46) ein, verwenden gemäß (4.22)

$$l_1^+(t) - t = a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) \tag{7.47}$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} &a\big(l_2^-(s)\big) - b(s) \\ &\quad\geq \frac{a(t) + \dot a(t)(s-t) - b\big(l_1^+(t)\big) + \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big(l_1^+(t) - s\big)}{1+\dot a(t)} \\ &\quad= \frac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) + \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big(l_1^+(t) - t\big) + \big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big)(s-t)}{1+\dot a(t)} \\ &\quad= \frac{\big(1 + \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big)\big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\big) + \big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big)(s-t)}{1+\dot a(t)} \end{aligned} \tag{7.48}$$

für alle $s \in [t, l_1^+(t)]$. Der letzte Ausdruck ist linear bezüglich s und nimmt für $s = t$ den Wert

$$\frac{1 + \dot b\big(l_1^+(t)\big)}{1 + \dot a(t)}\Big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big) > 0$$

sowie für $s = l_1^+(t)$ wegen (7.47) den Wert $a(t) - b\big(l_1^+(t)\big) > 0$ an, d.h. er ist größer Null für alle $s \in [t, l_1^+(t)]$. Die zu (7.48) analoge Abschätzung für $a\big(l_2^+(s)\big) - b(s)$ in $[t, l_1^+(t)]$ lautet

$$\begin{aligned} &a\big(l_2^+(s)\big) - b(s) \\ &\quad\geq \frac{\big(1 + \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big)\big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\big) + \big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\big)(s-t)}{1-\dot a(t)}, \end{aligned}$$

und der Ausdruck rechts ist ebenfalls für alle $s \in [t, l_1^+(t)]$ größer als Null. Der Kürze halber setzen wir vorübergehend

$$\begin{aligned} \varrho &:= \Big(1 + \dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)\Big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big), \\ \varsigma &:= \Big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big), \end{aligned} \tag{7.49}$$

so daß (7.48) und (7.49) die Form

$$\left.\begin{aligned} a\big(l_2^-(s)\big) - b(s) &\geq \frac{\varrho + \varsigma(s-t)}{1+\dot a(t)} > 0, \\ a\big(l_2^+(s)\big) - b(s) &\geq \frac{\varrho + \varsigma(s-t)}{1-\dot a(t)} > 0 \end{aligned}\right. \quad \big(s \in [t, l_1^+(t)]\big) \tag{7.50}$$

annehmen. Durch Einsetzen in (7.45) und mit (6.8) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}} - \frac{\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\sqrt{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}} \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\kappa_2 \int\limits_t^{l_1^+(t)} \left[\frac{1-\dot a\big(l_2^-(s)\big)}{1+\dot a\big(l_2^-(s)\big)} \left(\frac{1+\dot a(t)}{\varrho+\varsigma(s-t)}\right)^2 \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1+\dot a\big(l_2^+(s)\big)}{1-\dot a\big(l_2^+(s)\big)} \left(\frac{1-\dot a(t)}{\varrho+\varsigma(s-t)}\right)^2 \right] ds. \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\kappa_2 \frac{16}{1-\omega} \int\limits_t^{l_1^+(t)} \frac{1}{\big(\varrho+\varsigma(s-t)\big)^2} ds.
\end{aligned}$$

Wir führen die Integration aus und erhalten mit (7.47) sowie durch Rücksubstitution von (7.49)

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}} - \frac{\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\sqrt{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}} \\
&\qquad \leq \frac{8\kappa_2}{1-\omega} \frac{l_1^+(t)-t}{\varrho\Big(\varrho+\varsigma\big(l_1^+(t)-t\big)\Big)} \\
&\qquad = \frac{8\kappa_2}{1-\omega} \frac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\varrho\Big(\varrho+\varsigma\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)\Big)} \\
&\qquad = \frac{8\kappa_2}{1-\omega} \frac{1}{\Big(1+\dot a\big(l_1^+(t)\big)\Big)\Big(1+\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)}.
\end{aligned}$$

Weiter ergeben (6.8) und Hilfssatz 5.1

$$\begin{aligned}
\frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}} - \frac{\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\sqrt{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}} &< \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)^3} \frac{1}{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)} \\
&< \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)^3} \frac{2}{a(t)-b(t)}.
\end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz zusammen mit (6.50) folgt hieraus

$$\dot b(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big) \leq \frac{\dot b(t)}{\sqrt{1-\dot b(t)^2}} - \frac{\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\sqrt{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}} < \frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3} \frac{1}{a(t)-b(t)}.$$

Nun machen wir Gebrauch von (7.26) und erhalten schließlich

$$\dot{b}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) < \frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t}.$$

Da $t \in [\sigma, t^*]$ beliebig war, ist hiermit die erste Ungleichung von (ii) bewiesen. Die entsprechende Ungleichung für $a\big(l_2^+(t)\big) - \dot{b}(t)$ beweist man analog.

(iii) Wegen $l_1^-(t) < t$, $l_2^-(t) < t$ $(t \in \mathbb{R})$ und (7.42) gilt

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big) &= \dot{a}(t) - \dot{b}(t) + \dot{b}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big) \le \dot{a}(t) - \dot{b}(t)\\ \dot{a}\big(l_1^-(t)\big) - \dot{b}(t) &= \dot{a}(t) - \dot{b}(t) + \dot{a}\big(l_1^-(t)\big) - \dot{a}(t) \le \dot{a}(t) - \dot{b}(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und aus (7.26) folgt demnach

$$\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big) \le \mu, \quad \dot{a}\big(l_1^-(t)\big) - \dot{b}(t) \le \mu \quad \big(t \in [\sigma, t^*]\big).$$

Zu zeigen in (7.29) bleibt also

$$\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) \le \frac{\mu}{2}, \quad \dot{a}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{b}(t) \le \frac{\mu}{2} \quad \big(t \in [\sigma, t^*]\big).$$

Nach (7.26) und (ii) gilt

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) &= \dot{a}(t) - \dot{b}(t) + \dot{b}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) \le \mu + \frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t},\\ \dot{a}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{b}(t) &= \dot{a}(t) - \dot{b}(t) + \dot{a}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{a}(t) \le \mu + \frac{16\kappa_1}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t}\end{aligned}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Wegen $t^* \le t_0$ und (7.20) folgt hieraus

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big) &\le \mu + \frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t_0} \le \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2},\\ \dot{a}\big(l_1^+(t)\big) - \dot{b}(t) &\le \mu + \frac{16\kappa_1}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{t_0} \le \mu - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2}\end{aligned}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Damit ist (iii) bewiesen.

(iv) Wir können uns auf den Beweis der Ungleichung (7.30) beschränken, welche den Verlauf von $a(t)$ im Intervall $[\sigma, t^*]$ abschätzt. Die Gültigkeit der entsprechenden Abschätzung (7.31) für $b(t)$ in $[\sigma, t^*]$ beweist man vollkommen analog.

Wir machen wieder Gebrauch davon, daß a und b im Intervall $J = [\sigma, \tau]$ und damit aufgrund von $t^* \le t_0 < \tau$ auch in $[\sigma, t^*]$ die Gleichungen (WF) erfüllen. Beachtet man, daß wegen (5.10) für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big) &= \dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\frac{1-\dot{a}(t)}{1-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)} = \frac{\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)},\\ \frac{d}{dt}\Big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big) &= \dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\frac{1+\dot{a}(t)}{1+\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)} = \frac{\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}\end{aligned}$$

gilt, so ergibt sich aus (WF) mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}
\dot a(t) &= \dot a(\sigma)\\
&\quad+\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\\
&\qquad\times\Bigg[\frac{1+\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}\,\frac{1}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}\\
&\qquad\quad+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\,\frac{1}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\Bigg]\\
&\quad-\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\frac{1+\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\,\frac{1}{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}\\
&\qquad\quad+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\,\frac{1}{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}\Bigg]\\
&\quad+\frac{1}{2}\kappa_1\int_\sigma^t\Bigg[\left(\frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1+\dot b\big(l_1^-(s)\big)}{\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)}\right)\frac{1}{a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)}\\
&\qquad\quad+\left(\frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)}{\dot a(s)-\dot b\big(l_1^+(s)\big)}\right)\frac{1}{a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)}\Bigg]ds,
\end{aligned}\tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}
a(t) &= a(\sigma)+\dot a(\sigma)(t-\sigma)\\
&\quad+\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\\
&\qquad\times\Bigg[\frac{1+\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}\,\frac{1}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}\\
&\qquad\quad+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\,\frac{1}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\Bigg](t-\sigma)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\;\frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}\ln\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)\\
&\qquad\qquad+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}\ln\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)\;\Bigg]\\
&+\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\\
&\quad\times\Bigg[\;\frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big)^2}\ln\Big(a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big)\\
&\qquad+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)^2}\ln\Big(a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)\;\Bigg] \qquad (7.52)\\
&+\frac{1}{2}\kappa_1\int_\sigma^t\Bigg[\;\left(\frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\ln\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\\
&\qquad+\left(\frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\ln\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\;\Bigg]ds\\
&+\frac{1}{2}\kappa_1\int_\sigma^t\int_\sigma^s\Bigg[\;\left(\frac{d}{ds'}\big(1-\dot a(s')^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1+\dot b\big(l_1^-(s')\big)}{\dot a(s')-\dot b\big(l_1^-(s')\big)}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\frac{1}{a(s')-b\big(l_1^-(s')\big)}\\
&\qquad+\left(\frac{d}{ds'}\big(1-\dot a(s')^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s')\big)}{\dot a(s')-\dot b\big(l_1^+(s')\big)}\right)
\end{aligned}
$$

$$\left. \times \frac{1}{a(s') - b\big(l_1^+(s')\big)} \right] ds'ds$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Es sei darauf hingewiesen, daß die im Nenner auftretenden Ausdrücke $\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)$ und $\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)$ gemäß (iii) für alle $t \in [\sigma, t^*]$ von Null verschieden sind. Aufgrund von (6.5), (6.2) und $a \in C^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} a(\sigma) + \dot{a}(\sigma)(t - \sigma) &= x_{-\infty} + u_{-\infty}\sigma - \eta_1 \ln(-\sigma) + \left(u_{-\infty} - \frac{\eta_1}{\sigma}\right)(t - \sigma) \\ &= x_{-\infty} + u_{-\infty} t - \eta_1 \ln(-\sigma) - \eta_1 \frac{t - \sigma}{\sigma}, \end{aligned}$$

und daher folgt aus (7.52)

$$\begin{aligned} & a(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty} t - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2}{1 - v_{-\infty}^2}\right) \\ & + \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot{a}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \\ & \quad \times \left[\frac{1 - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} \ln\Big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big) \right. \\ & \qquad \left. + \frac{1 - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} \ln\Big(a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big) \right] = V_0 + \sum_{j=1}^{3} V_j(t) \end{aligned} \tag{7.53}$$

für $t \in [\sigma, t^*]$, mit

$$\begin{aligned} V_0 := {} & \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot{a}(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1 - \dot{b}\big(l_1^-(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot{a}(\sigma) - \dot{b}\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big)^2} \ln\Big(a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big) \right. \\ & \qquad \left. + \frac{1 - \dot{b}\big(l_1^+(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot{a}(\sigma) - \dot{b}\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)^2} \ln\Big(a(\sigma) - b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big) \right] \\ & - \eta_1 \ln(-\sigma) - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2}{1 - v_{-\infty}^2}\right), \end{aligned} \tag{7.54}$$

$$V_1(t) := \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot{a}(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1 + \dot{b}\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot{a}(\sigma) - \dot{b}\big(l_1^-(\sigma)\big)} \frac{\sigma}{a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right.$$

$$+\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot{a}(\sigma)-\dot{b}\big(l_1^+(\sigma)\big)}\frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\Bigg]\frac{t-\sigma}{\sigma} \tag{7.55}$$

$$-\eta_1\frac{t-\sigma}{\sigma},$$

$$\begin{aligned} V_2(t) := \frac{1}{2}\kappa_1\int_\sigma^t \Bigg[&\left(\frac{d}{ds}\left(1-\dot{a}(s)^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)^2}{\Big(\dot{a}(s)-\dot{b}\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right) \\ &\qquad\times\ln\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big) \\ &+\left(\frac{d}{ds}\left(1-\dot{a}(s)^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)^2}{\Big(\dot{a}(s)-\dot{b}\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right) \\ &\qquad\times\ln\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\Bigg]ds, \end{aligned} \tag{7.56}$$

$$\begin{aligned} V_3(t) := \frac{1}{2}\kappa_1\int_\sigma^t\int_\sigma^s \Bigg[&\left(\frac{d}{ds'}\left(1-\dot{a}(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1+\dot{b}\big(l_1^-(s')\big)}{\dot{a}(s')-\dot{b}\big(l_1^-(s')\big)}\right) \\ &\qquad\times\frac{1}{a(s')-b\big(l_1^-(s')\big)} \\ &+\left(\frac{d}{ds'}\left(1-\dot{a}(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}{\dot{a}(s')-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}\right) \\ &\qquad\times\frac{1}{a(s')-b\big(l_1^+(s')\big)}\Bigg]ds'ds. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Nun müssen wir den von t unabhängigen Term V_0 sowie für $t \in [\sigma, t^*]$ die Terme $V_1(t)$, $V_2(t)$ und $V_3(t)$ abschätzen.

Wir beginnen mit der Abschätzung des Doppelintegraltermes $V_3(t)$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(1-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(1+v)}{u-v} = \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}(1+v)(-1-2u^2+3uv)}{(u-v)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\,(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\frac{(1+v)}{u-v} = \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}(1+u)}{(u-v)^2} \tag{7.58}$$

für alle $u, v \in\,]-1,1[$, $u \neq v$, sowie (5.10) gilt

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds'}\left(1-\dot a(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1+\dot b\big(l_1^-(s')\big)}{\dot a(s')-\dot b\big(l_1^-(s')\big)} \\ &= \ddot a(s')\frac{\left(1-\dot a(s')^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big(1+\dot b\big(l_1^-(s')\big)\Big)\Big(-1-2\dot a(s')^2+3\dot a(s')\dot b\big(l_1^-(s')\big)\Big)}{\Big(\dot a(s')-\dot b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} \\ &+\ddot b\big(l_1^-(s')\big)\frac{\left(1-\dot a(s')^2\right)^{\frac{5}{2}}}{\Big(1-\dot b\big(l_1^-(s')\big)\Big)\Big(\dot a(s')-\dot b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} \end{aligned} \tag{7.59}$$

für $s' \in \mathbb{R}$. Mit (7.42), (6.8) und (iii) folgt

$$\begin{aligned} \frac{12}{\mu^2}\ddot a(s') &\geq \frac{d}{ds'}\left(1-\dot a(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1+\dot b\big(l_1^-(s')\big)}{\dot a(s')-\dot b\big(l_1^-(s')\big)} \\ &\geq -\frac{12}{\mu^2}\ddot a(s')+\frac{1}{(1-\omega)\mu^2}\ddot b\big(l_1^-(s')\big) \end{aligned} \tag{7.60}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$. Nun müssen wir $\ddot a(s')$ und $\ddot b\big(l_1^-(s')\big)$ abschätzen. Gemäß (WF) zusammen mit (6.8) und Hilfssatz 5.1 gilt

$$\begin{aligned} \ddot a(s') &\leq \frac{1}{2}\kappa_1\left[\frac{2}{1-\omega}\frac{1}{\Big(a(s')-b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2}+\frac{2}{1-\omega}\frac{1}{\Big(a(s')-b\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\kappa_1\left[\frac{2}{1-\omega}\left(\frac{2}{a(s')-b(s')}\right)^2+\frac{2}{1-\omega}\left(\frac{2}{a(s')-b(s')}\right)^2\right] \end{aligned}$$

und folglich

$$\ddot a(s') \leq \frac{8\kappa_1}{1-\omega}\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} \qquad \big(s' \in [\sigma, t^*]\big). \tag{7.61}$$

Bei der Abschätzung von $\ddot b\big(l_1^-(s')\big)$ ist zwischen $l_1^-(s') < \sigma$ und $l_1^-(s') \geq \sigma$ zu unterscheiden. Im ersten Fall gilt wegen (6.5), (6.2) sowie $l_1^-(s') < s' < 0$ und (4.22)

$$\ddot b\big(l_1^-(s')\big) = -\eta_2\frac{1}{l_1^-(s')^2} > -\eta_2\frac{1}{\big(s'-l_1^-(s')\big)^2} = -\eta_2\frac{1}{\Big(a(s')-b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2},$$

woraus nach Hilfssatz 5.1

$$\ddot{b}\big(l_1^-(s')\big) > -4\eta_2 \frac{1}{\big(a(s') - b(s')\big)^2} \qquad \big(s' \in [\sigma, t^*],\ l_1^-(s') < \sigma\big) \tag{7.62}$$

folgt. Im zweiten Fall ergibt (WF) zusammen mit (6.8)

$$\begin{aligned}\ddot{b}\big(l_1^-(s')\big) \geq -\frac{1}{2}\kappa_2 \Bigg[&\frac{2}{1-\omega} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(l_1^-(s'))\big) - b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} \\ &+ \frac{2}{1-\omega} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(l_1^-(s'))\big) - b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} \Bigg],\end{aligned}$$

was nach Satz 4.2 (i) und Hilfssatz 5.1

$$\begin{aligned}&\ddot{b}\big(l_1^-(s')\big) \\ &\geq -\frac{1}{2}\kappa_2 \Bigg[\frac{2}{1-\omega} \frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(l_1^-(s'))\big) - b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} \\ &\qquad + \frac{2}{1-\omega} \frac{1}{\Big(a(s') - b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} \Bigg] \qquad (7.63) \\ &\geq -\frac{1}{2}\kappa_2 \left[\frac{2}{1-\omega} \left(\frac{2}{a\big(l_1^-(s')\big) - b\big(l_1^-(s')\big)} \right)^2 + \frac{2}{1-\omega} \left(\frac{2}{a(s') - b(s')} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{4\kappa_2}{1-\omega} \left[\frac{1}{\Big(a\big(l_1^-(s')\big) - b\big(l_1^-(s')\big)\Big)^2} + \frac{1}{\big(a(s') - b(s')\big)^2} \right]\end{aligned}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$ mit $l_1^-(s') \geq \sigma$ zur Folge hat. Gemäß (7.25) und (7.26) gilt $\dot{a}(s') - \dot{b}(s') \leq \mu < 0$ für alle $s' \leq t^*$, d.h. $a(s') - b(s')$ ist streng monoton fallend, und daher besteht die Abschätzung

$$a\big(l_1^-(s')\big) - b\big(l_1^-(s')\big) > a(s') - b(s')$$

für $s' \leq t^*$. Aus (7.63) erhalten wir hiermit

$$\ddot{b}\big(l_1^-(s')\big) > -\frac{8\kappa_2}{1-\omega} \frac{1}{\big(a(s') - b(s')\big)^2} \qquad \big(s' \in [\sigma, t^*],\ l_1^-(s') \geq \sigma\big). \tag{7.64}$$

Da also für $l_1^-(s') < \sigma$ die Ungleichung (7.62) und für $l_1^-(s') \geq \sigma$ die Ungleichung (7.64) zutrifft, gilt in jedem Falle

$$\ddot{b}\big(l_1^-(s')\big) > -\frac{4\eta_2 + 8\kappa_2}{1-\omega}\,\frac{1}{\big(a(s') - b(s')\big)^2} \qquad \big(s' \in [\sigma, t^*]\big). \tag{7.65}$$

Die Ungleichungen (7.60), (7.61) und (7.65) ergeben zusammengefaßt

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{d}{ds'}\,\big(1-\dot{a}(s')^2\big)^{\frac{3}{2}}\,\frac{1+\dot{b}\big(l_1^-(s')\big)}{\dot{a}(s') - \dot{b}\big(l_1^-(s')\big)}\right| \\
&\qquad \leq \frac{12}{\mu^2}\ddot{a}(s') - \frac{1}{(1-\omega)\mu^2}\ddot{b}\big(l_1^-(s')\big) \\
&\qquad \leq \frac{12}{\mu^2}\frac{8\kappa_1}{1-\omega}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} + \frac{1}{(1-\omega)\mu^2}\frac{4\eta_2+8\kappa_2}{1-\omega}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} \\
&\qquad \leq \frac{96\kappa_1 + 8\kappa_2 + 4\eta_2}{(1-\omega)^2\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2}
\end{aligned}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$. Mit Hilfssatz 5.1 erhalten wir demnach für den ersten Integranden in (7.57) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{d}{ds'}\,\big(1-\dot{a}(s')^2\big)^{\frac{3}{2}}\,\frac{1+\dot{b}\big(l_1^-(s')\big)}{\dot{a}(s') - \dot{b}\big(l_1^-(s')\big)}\right)\frac{1}{a(s') - b\big(l_1^-(s')\big)}\right| \\
&\qquad \leq \frac{96\kappa_1 + 8\kappa_2 + \eta_2}{(1-\omega)^2\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2}\,\frac{1}{a(s') - b\big(l_1^-(s')\big)} \qquad (7.66) \\
&\qquad \leq \frac{192(\kappa_1 + \kappa_2 + \eta_2)}{(1-\omega)^2\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^3}
\end{aligned}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$. Jetzt schätzen wir den zweiten Integranden ab. Wegen (5.10) gilt in Analogie zu (7.59)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds'}\,\big(1-\dot{a}(s')^2\big)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}{\dot{a}(s') - \dot{b}\big(l_1^+(s')\big)} \\
&\quad = \ddot{a}(s')\frac{\big(1-\dot{a}(s')^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big(1-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)\Big)\Big(-1-2\dot{a}(s')^2 + 3\dot{a}(s')\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)\Big)}{\Big(\dot{a}(s') - \dot{b}\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2} \\
&\qquad + \ddot{b}\big(l_1^+(s')\big)\frac{\big(1-\dot{a}(s')^2\big)^{\frac{5}{2}}}{\Big(1+\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)\Big)\Big(\dot{a}(s') - \dot{b}\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}
\end{aligned}$$

für $s' \in \mathbb{R}$. Mit (7.42), (6.8) und (iii) folgt

$$\begin{aligned}\frac{48}{\mu^2}\ddot{a}(s') &\geq \frac{d}{ds'}\left(1-\dot{a}(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}{\dot{a}(s')-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}\\ &\geq -\frac{48}{\mu^2}\ddot{a}(s')+\frac{4}{(1-\omega)\mu^2}\ddot{b}\big(l_1^+(s')\big)\end{aligned}\tag{7.67}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$. Nun müssen wir $\ddot{b}\big(l_1^+(t)\big)$ abschätzen. Gemäß (WF) zusammen mit (6.8) gilt

$$\begin{aligned}\ddot{b}\big(l_1^+(s')\big) \geq -\frac{1}{2}\kappa_2\Bigg[&\frac{2}{1-\omega}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^-(l_1^+(s'))\big)-b\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}\\ &+\frac{2}{1-\omega}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(l_1^+(s'))\big)-b\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}\Bigg],\end{aligned}$$

woraus sich nach Satz 4.2 (i) und Hilfssatz 5.1

$$\begin{aligned}&\ddot{b}\big(l_1^+(s')\big)\\ &\geq -\frac{1}{2}\kappa_2\Bigg[\frac{2}{1-\omega}\frac{1}{\Big(a(s')-b\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}\\ &\qquad+\frac{2}{1-\omega}\frac{1}{\Big(a\big(l_2^+(l_1^+(s'))\big)-b\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}\Bigg]\\ &\geq -\frac{1}{2}\kappa_2\left[\frac{2}{1-\omega}\left(\frac{2}{a(s')-b(s')}\right)^2+\frac{2}{1-\omega}\left(\frac{2}{a\big(l_1^+(s')\big)-b\big(l_1^+(s')\big)}\right)^2\right]\\ &\geq -\frac{4\kappa_2}{1-\omega}\left[\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2}+\frac{1}{\Big(a\big(l_1^+(s')\big)-b\big(l_1^+(s')\big)\Big)^2}\right]\end{aligned}\tag{7.68}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$ ergibt. Aufgrund von (6.5) schließt diese Ungleichung den Fall $l_1^+(s') > \tau$ ein. Der im Nenner auftretende Ausdruck $a\big(l_1^+(s')\big) - b\big(l_1^+(s')\big)$ läßt sich mit (6.8) und dem Mittelwertsatz gemäß

$$a\big(l_1^+(s')\big)-b\big(l_1^+(s')\big) \geq a(s')-\omega\big(l_1^+(s')-s'\big)-b\big(l_1^+(s')\big)$$

abschätzen, und wegen (4.22) sowie Hilfssatz 5.1 impliziert dies

$$\begin{aligned} a\big(l_1^+(s')\big) - b\big(l_1^+(s')\big) &\geq (1-\omega)\Big(a(s') - b\big(l_1^+(s')\big)\Big) \\ &\geq (1-\omega)\frac{a(s')-b(s')}{2} \end{aligned}$$

für alle $s' \in \mathbb{R}$. Aus (7.68) folgt also

$$\ddot{b}\big(l_1^+(s')\big) > -\frac{20\kappa_2}{(1-\omega)^3}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} \qquad \big(s' \in [\sigma, t^*]\big). \tag{7.69}$$

Die Ungleichungen (7.67), (7.61) und (7.69) ergeben zusammengefaßt

$$\begin{aligned} &\left|\frac{d}{ds'}\left(1-\dot{a}(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}{\dot{a}(s')-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}\right| \\ &\leq \frac{48}{\mu^2}\ddot{a}(s') - \frac{4}{(1-\omega)\mu^2}\ddot{b}\big(l_1^+(s')\big) \\ &\leq \frac{48}{\mu^2}\frac{8\kappa_1}{1-\omega}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} + \frac{4}{(1-\omega)\mu^2}\frac{20\kappa_2}{(1-\omega)^3}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} \\ &\leq \frac{384\kappa_1 + 80\kappa_2}{(1-\omega)^4\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2} \end{aligned}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$. Mit Hilfssatz 5.1 erhalten wir demnach für den zweiten Integranden in (7.57) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{d}{ds'}\left(1-\dot{a}(s')^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}{\dot{a}(s')-\dot{b}\big(l_1^+(s')\big)}\right)\frac{1}{a(s')-b\big(l_1^+(s')\big)}\right| \\ &\qquad \leq \frac{384\kappa_1 + 80\kappa_2}{(1-\omega)^4\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^2}\,\frac{1}{a(s')-b\big(l_1^+(s')\big)} \\ &\qquad \leq \frac{768(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)^4\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^3} \end{aligned}$$

für alle $s' \in [\sigma, t^*]$. Anhand von (7.66) und (7.70) läßt sich der Term $V_3(t)$ also folgendermaßen abschätzen:

$$|V_3(t)| \leq \frac{1}{2}\kappa_1 \int_\sigma^t \int_\sigma^s \Bigg[\quad \frac{192(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^2\mu^2}\,\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^3}$$

$$
+\frac{768(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)^4\mu^2}\frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^3}\Bigg]ds'ds
$$

$$
\leq \frac{480\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^2}\int\limits_\sigma^t\int\limits_\sigma^s \frac{1}{\big(a(s')-b(s')\big)^3}ds'ds
$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Jetzt machen wir Gebrauch von (7.26) und erhalten schließlich

$$
\begin{aligned}
|V_3(t)| &\leq \frac{480\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^2}\int\limits_\sigma^t\int\limits_\sigma^s \frac{1}{(\mu s')^3}ds'ds \\
&\leq \frac{480\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^5}\int\limits_\sigma^t -\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}d \\
&\leq \frac{240\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^5}\frac{1}{t}
\end{aligned}
\tag{7.70}
$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Als nächstes schätzen wir den gemäß (7.56) definierten Integralterm $V_2(t)$ ab. Aufgrund von (7.26), $t^* \leq t_0$ und der Voraussetzung (7.21) an t_0 gilt

$$
\frac{a(s)-b(s)}{2} \geq \frac{\mu s}{2} \geq \frac{\mu t_0}{2} \geq 1 \tag{7.71}
$$

für alle $s \in [\sigma, t^*]$, sodaß nach Hilfssatz 5.1 und (6.8) die Abschätzungen

$$
\left.
\begin{aligned}
0 \leq \ln\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big) &\leq \ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right), \\
0 \leq \ln\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big) &\leq \ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)
\end{aligned}
\right\}\quad \big(s \in [\sigma, t^*]\big) \tag{7.72}
$$

bestehen. Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\frac{(1-v^2)}{(u-v)^2} &= \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}(1-v^2)(-2-u^2+3uv)}{(u-v)^3} \\
\frac{\partial}{\partial v}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\frac{(1-v^2)}{(u-v)^2} &= \frac{2(1-u^2)^{\frac{3}{2}}(1-uv)}{(u-v)^3}
\end{aligned}
\tag{7.73}
$$

für alle $u, v \in \,]-1, 1[$, $u \neq v$, sowie (5.10) gilt weiter

$$\frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac32}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}$$

$$= \ddot a(s)\frac{\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac12}\Big(1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)^2\Big)\Big(-2-\dot a(s)^2+3\dot a(s)\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^3}$$

$$+\ddot b\big(l_1^-(s)\big)\frac{2\big(1-\dot a(s)\big)\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac32}\Big(1-\dot a(s)\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)}{\Big(1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^3}$$

für $s \in \mathbb{R}$. Mit (7.42), (6.8), (iii) und

$$-2-u^2+3uv=-2-(u-v)^2+v^2+uv<0 \quad \big(u,v\in\,]-1,1[\big) \tag{7.74}$$

folgt

$$0\le \frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac32}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\le -\frac{6}{\mu^3}\ddot a(s)+\frac{8}{(1-\omega)\mu^3}\ddot b\big(l_1^-(s)\big)$$

für alle $s \in [\sigma, t^*]$. Zusammen mit (7.61), (7.65) und (7.72) ergibt sich hieraus für den ersten Integranden in (7.56) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{d}{ds}\big(1-\dot a(s)^2\big)^{\frac32}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\right)\ln\Big(a(s)-b\big(l_1^-(s)\big)\Big)\right|\\
&\le\left(-\frac{6}{\mu^3}\ddot a(s)+\frac{8}{(1-\omega)\mu^3}\ddot b\big(l_1^-(s)\big)\right)\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)\\
&\le\Bigg(-\frac{6}{\mu^3}\frac{8\kappa_1}{1-\omega}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\\
&\qquad-\frac{8}{(1-\omega)\mu^3}\frac{4\eta_2+8\kappa_2}{1-\omega}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\Bigg)\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)\\
&\le -\frac{64(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^2\mu^3}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)
\end{aligned} \tag{7.75}$$

für alle $s \in [\sigma, t^*]$. Nun schätzen wir den zweiten Integranden ab. Wegen (7.73) und (5.10) gilt in Analogie zu (7.74)

$$\frac{d}{ds}\left(1-\dot a(s)^2\right)^{\frac32}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}$$

$$= \ddot a(s)\frac{\left(1-\dot a(s)^2\right)^{\frac12}\Big(1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)^2\Big)\Big(-2-\dot a(s)^2+3\dot a(s)\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^3}$$

$$+\ddot b\big(l_1^+(s)\big)\frac{2\big(1+\dot a(s)\big)\left(1-\dot a(s)^2\right)^{\frac32}\Big(1-\dot a(s)\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)}{\Big(1+\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^3}$$

für $s\in\mathbb{R}$. Mit (7.42), (6.8), (iii) und (7.74) folgt

$$0\le\frac{d}{ds}\left(1-\dot a(s)^2\right)^{\frac32}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^-(s)\big)\Big)^2}\le-\frac{48}{\mu^3}\ddot a(s)+\frac{64}{(1-\omega)\mu^3}\ddot b\big(l_1^-(s)\big)$$

für alle $s\in[\sigma,t^*]$. Zusammen mit (7.61), (7.69) und (7.72) ergibt sich hieraus für den zweiten Integranden in (7.56) die Abschätzung

$$\left|\left(\frac{d}{ds}\left(1-\dot a(s)^2\right)^{\frac32}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(s)\big)^2}{\Big(\dot a(s)-\dot b\big(l_1^+(s)\big)\Big)^2}\right)\ln\Big(a(s)-b\big(l_1^+(s)\big)\Big)\right|$$

$$\le\left(-\frac{48}{\mu^3}\ddot a(s)+\frac{64}{(1-\omega)\mu^3}\ddot b\big(l_1^+(s)\big)\right)\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)$$

$$\le\Bigg(-\frac{48}{\mu^3}\frac{8\kappa_1}{1-\omega}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}$$

$$-\frac{64}{(1-\omega)\mu^3}\frac{20\kappa_2}{(1-\omega)^3}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\Bigg)\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)$$

$$\le-\frac{1280(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)^4\mu^3}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)$$

für alle $s\in[\sigma,t^*]$. Anhand von (7.75) und (7.76) läßt sich der Term $V_2(t)$ folgendermaßen abschätzen:

$$|V_2(t)|\le\frac12\kappa_1\int_\sigma^t\Bigg[-\frac{64(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^2\mu^3}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)$$

$$-\frac{1280(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)^4\mu^3}\frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)\Bigg]ds \quad (7.76)$$

$$\leq -\frac{672\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^3}\int\limits_\sigma^t \frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)ds$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Mit Hilfe von (7.26) und

$$\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right) \geq 0 \qquad \big(s \in [\sigma, t^*]\big) \tag{7.77}$$

gemäß (7.72) ergibt das verbleibende Integral

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\sigma^t \frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)ds \\
&\qquad \leq \int\limits_\sigma^t \frac{1}{\mu}\frac{\dot a(s)-\dot b(s)}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)ds \\
&\qquad = -\frac{1}{\mu}\frac{\ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right)+1}{a(t)-b(t)} + \frac{1}{\mu}\frac{\ln\left(\frac{a(\sigma)-b(\sigma)}{1-\omega}\right)+1}{a(\sigma)-b(\sigma)} \\
&\qquad \leq -\frac{1}{\mu}\frac{\ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right)+1}{a(t)-b(t)}
\end{aligned}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Der letzte Ausdruck vergrößert sich wegen (7.26), (7.77) und

$$\frac{d}{dx}\frac{\ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right)+1}{x} = -\frac{\ln\left(\frac{x}{1-\omega}\right)}{x^2} < -\frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \big(x \in\,]-\infty, 0[\big),$$

wenn wir $a(t)-b(t)$ durch μt ersetzen, denn (7.26) und der Bedingung (7.20) an t_0 gemäß gilt

$$\ln\big(a(t)-b(t)\big) \geq \ln(\mu t) \geq \ln(\mu t_0) \geq \ln 2 > 0.$$

Es folgt also

$$\int\limits_\sigma^t \frac{1}{\big(a(s)-b(s)\big)^2}\ln\left(\frac{a(s)-b(s)}{1-\omega}\right)ds \leq -\frac{1}{\mu}\frac{\ln\left(\frac{\mu t}{1-\omega}\right)+1}{\mu t},$$

und aus (7.76) erhalten wir hiermit schließlich

$$|V_2(t)| \leq \frac{672\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^5}\,\frac{\ln\left(\frac{\mu t}{1-\omega}\right)+1}{t} \tag{7.78}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$.

Für die folgenden Abschätzungen, insbesondere der Terme $V_1(t)$ und V_0, benötigen wir, daß

$$\begin{aligned}\Lambda(t) := \quad & \left| \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} - \frac{1}{2}\eta_1 \right| \\ & + \left| \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} - \frac{1}{2}\eta_1 \right|\end{aligned}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$ der Ungleichung

$$\Lambda(t) \le \frac{18\kappa_1(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^3}\frac{1}{|\sigma|} + \frac{144\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)|\mu|^5}\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{\sigma}\right| + \frac{256\kappa_1\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{1}{|t|} \tag{7.79}$$

genügt. Zum Beweis sei ein beliebiges $t \in [\sigma, t^*]$ fest gewählt. Wir resubstituieren zunächst (6.1), so daß sich

$$\begin{aligned}\Lambda(t) = \quad & \frac{1}{2}\kappa_1 \left| \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} - \big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2} \right| \\ & + \frac{1}{2}\kappa_1 \left| \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} - \big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2} \right| \\ \le \quad & \frac{1}{2}\kappa_1 \left| \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} - \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{\big(\dot a(t)-v_{-\infty}\big)^2} \right| \\ & + \frac{1}{2}\kappa_1 \left| \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} - \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{\big(\dot a(t)-v_{-\infty}\big)^2} \right| \\ & + \kappa_1 \left| \big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{\big(\dot a(t)-v_{-\infty}\big)^2} - \big(1-u_{-\infty}^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{\big(1-v_{-\infty}^2\big)}{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2} \right|\end{aligned}$$

ergibt. Nun wenden wir zusammen mit (7.73) den Mittelwertsatz an. Beachtet man hierbei, daß wegen (7.43) und (iii)

$$\begin{aligned}\dot a(t) - v_{-\infty} &< \dot a(t) - \dot b\big(l_1^-(t)\big) \le \mu < 0, \\ \dot a(t) - v_{-\infty} &< \dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big) \le \frac{\mu}{2} < 0, \\ u_{-\infty} - v_{-\infty} &< \dot a(t) - v_{-\infty} < \mu < 0,\end{aligned}$$

gilt, so folgt

$$\Lambda(t) \le \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{4}{|\mu|^3}\left|\dot b\big(l_1^-(t)\big) - v_\infty\right| + \frac{1}{2}\kappa_1 \frac{32}{|\mu|^3}\left|\dot b\big(l_1^+(t)\big) - v_\infty\right| + \kappa_1 \frac{6}{|\mu|^3}\left|\dot a(t) - v_\infty\right|.$$

Aufgrund von (7.42) und $l_1^-(t) < t$ bedeutet dies

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &\le \frac{2\kappa_1}{|\mu|^3}\left|\dot b(t) - v_\infty\right| + \frac{16\kappa_1}{|\mu|^3}\left|\dot b\big(l_1^+(t)\big) - v_\infty\right| + \frac{6\kappa_1}{|\mu|^3}\left|\dot a(t) - v_\infty\right| \\ &= \frac{18\kappa_1}{|\mu|^3}\left|\dot b(t) - v_\infty\right| + \frac{16\kappa_1}{|\mu|^3}\left|\dot b\big(l_1^+(t)\big) - \dot b(t)\right| + \frac{6\kappa_1}{\mu^3}\left|\dot a(t) - v_\infty\right|.\end{aligned}$$

Mit (i) und (ii) erhalten wir hieraus schließlich

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &\le \frac{18\kappa_1}{|\mu|^3}\left(\eta_2 \frac{1}{|\sigma|} + \frac{8\kappa_2}{(1-\omega)|\mu|^2}\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right|\right) + \frac{16\kappa_1}{|\mu|^3}\frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|}\frac{1}{|t|} \\ &\quad \frac{6\kappa_1}{|\mu|^3}\left(\eta_1 \frac{1}{|\sigma|} + \frac{8\kappa_1}{(1-\omega)|\mu|^2}\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right|\right) \\ &\le \frac{18\kappa_1(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^3}\frac{1}{|\sigma|} + \frac{144\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)|\mu|^5}\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{\sigma}\right| + \frac{256\kappa_1\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{1}{|t|},\end{aligned}$$

wie behauptet. Wegen $\sigma \le t < 0$ und $-1 < \mu < 0$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} - \frac{1}{2}\eta_1\right| \\ &+ \left|\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} - \frac{1}{2}\eta_1\right| \\ &\qquad \le \frac{400\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\frac{1}{|t|}\end{aligned} \tag{7.80}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$, und im Falle $t = \sigma$ folgt aus (7.79)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma) - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big)^2} - \frac{1}{2}\eta_1\right| \\ &+ \left|\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma) - \dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)^2} - \frac{1}{2}\eta_1\right| \\ &\qquad \le \frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{1}{|\sigma|}.\end{aligned} \tag{7.81}$$

Nun kommen wir zur Abschätzung des gemäß (7.55) definierten Termes $V_1(t)$. Wegen $\sigma < t < 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&|V_1(t)| \\
&\leq \left| \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1+\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)} \frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)} \right] - \eta_1 \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big)^2} + \frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)^2} \right] - \eta_1 \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1+\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)} - \frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)} - \frac{1+\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)} \right) \right|
\end{aligned}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Mit (7.81) und (iii) folgt

$$\begin{aligned}
|V_1(t)| \leq & -\frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3\mu^4}\frac{1}{\sigma} \\
& - \frac{\kappa_1}{\mu}\left| \frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)} - \frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right| \\
& - \frac{2\kappa_1}{\mu}\left| \frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)} - \frac{1+\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)} \right|
\end{aligned} \tag{7.82}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Weiter gilt nach (4.22) und dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)} &= \frac{\sigma}{a(\sigma) - b(\sigma)} \left(1 - \frac{b(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)}\right) \\
&= \frac{\sigma}{a(\sigma) - b(\sigma)} \left(1 - \frac{b(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma - l_1^-(\sigma)}\right) \\
&= \frac{1 - \dot b(\widetilde{T}^-)}{\dfrac{a(\sigma)}{\sigma} - \dfrac{b(\sigma)}{\sigma}}
\end{aligned} \tag{7.83}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{a(\sigma) - b\big(l_1^+(\sigma)\big)} &= \frac{\sigma}{a(\sigma) - b(\sigma)} \left(1 + \frac{b\big(l_1^+(\sigma)\big) - b(\sigma)}{a(\sigma) - b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\right) \\
&= \frac{\sigma}{a(\sigma) - b(\sigma)} \left(1 + \frac{b\big(l_1^+(\sigma)\big) - b(\sigma)}{l_1^+(\sigma) - \sigma}\right) \\
&= \frac{1 + \dot b(\widetilde{T}^+)}{\dfrac{a(\sigma)}{\sigma} - \dfrac{b(\sigma)}{\sigma}},
\end{aligned} \tag{7.84}$$

mit gewissen

$$\widetilde{T}^- \in \big[l_1^-(\sigma), \sigma\big], \quad \widetilde{T}^+ \in \big[\sigma, l_1^+(\sigma)\big]. \tag{7.85}$$

Beachtet man (iii) und zudem, daß gemäß (7.25)

$$\frac{a(\sigma)}{\sigma} - \frac{b(\sigma)}{\sigma} \le \mu < 0$$

gilt, so ergibt sich anhand des Mittelwertsatzes und mit (7.42) für den ersten Betragsausdruck in (7.82)

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\sigma}{a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)} - \frac{1 - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma) - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right| \\
&= \left| \frac{1 - \dot b(\widetilde{T}^-)}{\dfrac{a(\sigma)}{\sigma} - \dfrac{b(\sigma)}{\sigma}} - \frac{1 - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma) - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right| \\
&\le \left| \frac{1 - \dot b(\widetilde{T}^-)}{\dfrac{a(\sigma)}{\sigma} - \dfrac{b(\sigma)}{\sigma}} - \frac{1 - \dot b(\widetilde{T}^-)}{\dot a(\sigma) - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right| + \left| \frac{\dot b(\widetilde{T}^-) - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma) - \dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\left|\frac{1}{\dfrac{a(\sigma)}{\sigma}-\dfrac{b(\sigma)}{\sigma}}-\frac{1}{\dot a(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^-(\sigma)\bigr)}\right|+\frac{1}{|\mu|}\Bigl|\dot b(\widetilde{T}^-)-\dot b\bigl(l_1^-(\sigma)\bigr)\Bigr| \qquad (7.86)\\
&\leq \frac{2}{|\mu|^2}\left|\left(\frac{a(\sigma)}{\sigma}-\frac{b(\sigma)}{\sigma}\right)-\Bigl(\dot a(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^-(\sigma)\bigr)\Bigr)\right|+\frac{1}{|\mu|}\Bigl|\dot b(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^-(\sigma)\bigr)\Bigr|\\
&\leq \frac{2}{|\mu|^2}\left|\frac{a(\sigma)}{\sigma}-\dot a(\sigma)-\frac{b(\sigma)}{\sigma}+\dot b(\sigma)\right|+\left(\frac{2}{|\mu|^2}+\frac{1}{|\mu|}\right)\Bigl|\dot b(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^-(\sigma)\bigr)\Bigr|.
\end{aligned}$$

Auf analoge Weise gelangt man zu der Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sigma}{a(\sigma)-b\bigl(l_1^+(\sigma)\bigr)}-\frac{1+\dot b\bigl(l_1^+(\sigma)\bigr)}{\dot a(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^+(\sigma)\bigr)}\right|\\
&\leq \frac{8}{|\mu|^2}\left|\frac{a(\sigma)}{\sigma}-\dot a(\sigma)-\frac{b(\sigma)}{\sigma}+\dot b(\sigma)\right|+\left(\frac{8}{|\mu|^2}+\frac{2}{|\mu|}\right)\Bigl|\dot b(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^+(\sigma)\bigr)\Bigr|,
\end{aligned} \qquad (7.87)$$

wobei gegenüber (7.86) den Abschätzungen (iii) entsprechend $|\mu|$ durch $|\mu|/2$ zu ersetzen ist. Gemäß (6.5), (6.2) und $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a(\sigma)}{\sigma}-\dot a(\sigma)-\frac{b(\sigma)}{\sigma}+\dot b(\sigma)\right|\\
&\quad=\left|\left(\frac{x_{-\infty}}{\sigma}+u_{-\infty}-\eta_1\frac{\ln(-\sigma)}{\sigma}\right)-\left(u_{-\infty}-\frac{\eta_1}{\sigma}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{y_{-\infty}}{\sigma}+v_{-\infty}+\eta_2\frac{\ln(-\sigma)}{\sigma}\right)+\left(v_{-\infty}+\frac{\eta_2}{\sigma}\right)\right| \qquad (7.88)\\
&\quad\leq |x_{-\infty}-y_{-\infty}|\,\frac{1}{|\sigma|}+(\eta_1+\eta_2)\,\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|},
\end{aligned}$$

und wegen $l_1^-(\sigma) < \sigma < 0$ gilt zudem

$$\begin{aligned}
\Bigl|\dot b(\sigma)-\dot b\bigl(l_1^-(\sigma)\bigr)\Bigr| &\leq \left|\left(v_{-\infty}+\frac{\eta_2}{\sigma}\right)-\left(v_{-\infty}+\frac{\eta_2}{l_1^-(\sigma)}\right)\right|\\
&\leq \frac{\eta_2}{|\sigma|}+\frac{\eta_2}{|l_1^-(\sigma)|}\\
&\leq 2\eta_2\,\frac{1}{|\sigma|},
\end{aligned}$$

so daß aus (7.86) (mit $|\mu| < 1$)

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}-\frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)}\right| \\
&\quad\le \frac{2}{|\mu|^2}\left(|x_{-\infty}-y_{-\infty}|\frac{1}{|\sigma|}+(\eta_1+\eta_2)\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right)+\frac{3}{|\mu|^2}2\eta_2\frac{1}{|\sigma|} \qquad (7.89)\\
&\quad\le \frac{2|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+6\eta_2}{|\mu|^2}\,\frac{1}{|\sigma|}+\frac{2(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^2}\,\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}
\end{aligned}
$$

folgt. Ferner haben (7.87), (7.88) und (ii)

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\sigma}{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}-\frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)}\right| \\
&\quad\le \frac{8}{|\mu|^2}\left(|x_{-\infty}-y_{-\infty}|\frac{1}{|\sigma|}+(\eta_1+\eta_2)\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right)+\frac{10}{|\mu|^2}\frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3\mu}\,\frac{1}{\sigma} \qquad (7.90)\\
&\quad\le \frac{8|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+160\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|^3}\,\frac{1}{|\sigma|}+\frac{8(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^2}\,\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}
\end{aligned}
$$

zur Folge. Indem wir die Ungleichungen (7.82), (7.89) und (7.90) zusammenfassen, erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
|V_1(t)| \le{}& \frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\,\frac{1}{|\sigma|} \\
&+\frac{\kappa_1}{|\mu|}\left(\frac{2|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+6\eta_2}{|\mu|^2}\,\frac{1}{|\sigma|}+\frac{2(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^2}\,\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right) \\
&+\frac{2\kappa_1}{|\mu|}\left(\frac{8|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+160\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|^3}\,\frac{1}{|\sigma|}+\frac{8(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^2}\,\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right) \qquad (7.91)\\
\le{}& \frac{18\kappa_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+576\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\,\frac{1}{|\sigma|} \\
&+\frac{18\kappa_1(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^3}\,\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$.

Schließlich schätzen wir noch den von t unabhängigen, gemäß (7.54) definierten Term V_0 ab. Es gilt

$$
\begin{aligned}
V_0 ={}& \left(\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big)^2}-\frac{1}{2}\eta_1\right)\ln\Big(a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)\Big) \\
&+\left(\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(\sigma)^2\big)^{\frac{3}{2}}\frac{1-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)^2}{\Big(\dot a(\sigma)-\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)^2}-\frac{1}{2}\eta_1\right)\ln\Big(a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right).$$

Mit (7.72) und (7.81) folgt

$$\begin{aligned}|V_0| \le{}& \frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\,\frac{1}{|\sigma|}\ln\left(\frac{a(\sigma)-b(\sigma)}{1-\omega}\right)\\ &+\frac{1}{2}\eta_1\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right)\right|\\ &+\frac{1}{2}\eta_1\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Gemäß (6.5) und (6.2) gilt

$$\begin{aligned}a(\sigma)-b(\sigma) &= x_{-\infty}-y_{-\infty}+(u_{-\infty}-v_{-\infty})\sigma-(\eta_1+\eta_2)\ln(-\sigma)\\ &\le |x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}|V_0| \le{}& \frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\,\frac{1}{|\sigma|}\ln\left(\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|}{1-\omega}\right)\\ &+\frac{1}{2}\eta_1\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right)\right|\\ &+\frac{1}{2}\eta_1\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right)\right|.\end{aligned} \tag{7.92}$$

Wir müssen nun die beiden letzten Terme weiter abschätzen. Wegen Hilfssatz 5.1 und (7.26) gilt

$$-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma} \ge -\frac{a(\sigma)-b(\sigma)}{2\sigma} \ge -\frac{\mu\sigma}{2\sigma} = \frac{|\mu|}{2} \tag{7.93}$$

und

$$-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}} \ge -\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{2} = |\mu| \tag{7.94}$$

sowie entsprechend

$$-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma} \ge \frac{|\mu|}{2}, \qquad -\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}} \ge |\mu|. \tag{7.95}$$

Nach dem Mittelwertsatz ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right)\right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{2}{|\mu|}\left|\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right|, \\
&\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right)\right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{2}{|\mu|}\left|\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right|,
\end{aligned} \tag{7.96}$$

was mit (7.83), (7.84), (6.8) und (7.40)

$$\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right)\right| \\
&\le \frac{2}{|\mu|}\left|\frac{\frac{a(\sigma)}{\sigma}-\frac{b(\sigma)}{\sigma}}{1-\dot b(\widetilde T^-)}-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right| \\
&\le \frac{2}{|\mu|}\left|\frac{\frac{a(\sigma)}{\sigma}-\frac{b(\sigma)}{\sigma}-(u_{-\infty}-v_{-\infty})}{1-\dot b(\widetilde T^-)}\right|+\frac{2}{|\mu|}\left|\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-\dot b(\widetilde T^-)}-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right| \\
&\le \frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(\sigma)}{\sigma}-u_{-\infty}-\frac{b(\sigma)}{\sigma}+v_{-\infty}\right|+\frac{2|u_{-\infty}-v_{-\infty}|}{(1-\omega)^2|\mu|}\left|\dot b(\widetilde T^-)-v_{-\infty}\right|
\end{aligned} \tag{7.97}$$

sowie analog

$$\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right)\right| \\
&\le \frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(\sigma)}{\sigma}-u_{-\infty}-\frac{b(\sigma)}{\sigma}+v_{-\infty}\right|+\frac{2|u_{-\infty}-v_{-\infty}|}{(1-\omega)^2|\mu|}\left|\dot b(\widetilde T^+)-v_{-\infty}\right|
\end{aligned} \tag{7.98}$$

zur Folge hat. Gemäß (6.5) und (6.2) gilt

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a(\sigma)}{\sigma} - u_{-\infty} - \frac{b(\sigma)}{\sigma} + v_{-\infty}\right| \\
&\quad = \left|\left(\frac{x_{-\infty}}{\sigma} + u_{-\infty} - \eta_1 \frac{\ln(-\sigma)}{\sigma}\right) - u_{-\infty} - \left(\frac{y_{-\infty}}{\sigma} + v_{-\infty} + \eta_2 \frac{\ln(-\sigma)}{\sigma}\right) + v_{-\infty}\right| \\
&\quad \le |x_{-\infty} - y_{-\infty}| \frac{1}{|\sigma|} + (\eta_1 + \eta_2) \frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|},
\end{aligned}
$$

und aufgrund von (7.85), (7.42), (7.40) sowie $l_1^-(\sigma) < \sigma < l_1^+(\sigma)$ gilt zudem

$$
\begin{aligned}
\left|\dot b(\widetilde{T}^-) - v_{-\infty}\right| &\le \left|\dot b(\sigma) - v_{-\infty}\right| \\
\left|\dot b(\widetilde{T}^+) - v_{-\infty}\right| &\le \left|\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big) - v_{-\infty}\right| \\
&\le \left|\dot b(\sigma) - v_{-\infty}\right| + \left|\dot b\big(l_1^+(\sigma)\big) - \dot b(\sigma)\right|,
\end{aligned}
\tag{7.99}
$$

woraus wegen (6.5), (6.2) und $b \in C^1(\mathbb{R})$ bzw. mit (ii)

$$
\begin{aligned}
\left|\dot b(\widetilde{T}^-) - v_{-\infty}\right| &\le \left|\left(v_{-\infty} + \frac{\eta_2}{\sigma}\right) - v_{-\infty}\right| \\
&= \eta_2 \frac{1}{|\sigma|}, \\
\left|\dot b(\widetilde{T}^+) - v_{-\infty}\right| &\le \eta_2 \frac{1}{|\sigma|} + \frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|} \frac{1}{|\sigma|}
\end{aligned}
$$

folgt. Aus (7.97) und (7.98) erhalten wir also mit $|u_{-\infty} - v_{-\infty}| < 2$

$$
\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma) - b\big(l_1^-(\sigma)\big)}{\sigma}\right) - \ln\left(-\frac{u_{-\infty} - v_{-\infty}}{1 - v_{-\infty}}\right)\right| \\
&\qquad \le \frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| \frac{1}{|\sigma|} + (\eta_1 + \eta_2) \frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right) \\
&\qquad\quad + \frac{4}{(1-\omega)^2|\mu|} \eta_2 \frac{1}{|\sigma|} \\
&\qquad \le \frac{2|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 4\eta_2}{(1-\omega)^2|\mu|} \frac{1}{|\sigma|} + \frac{2(\eta_1 + \eta_2)}{(1-\omega)|\mu|} \frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}
\end{aligned}
\tag{7.100}
$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{a(\sigma)-b\big(l_1^+(\sigma)\big)}{\sigma}\right)-\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right)\right|\\
&\qquad\le\frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left(|x_{-\infty}-y_{-\infty}|\frac{1}{|\sigma|}+(\eta_1+\eta_2)\frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right)\\
&\qquad\quad+\frac{4}{(1-\omega)^2|\mu|}\left(\eta_2\frac{1}{|\sigma|}+\frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|}\frac{1}{|\sigma|}\right)\\
&\qquad\le\frac{2|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+4\eta_2+64\kappa_2}{(1-\omega)^5|\mu|^2}\frac{1}{|\sigma|}+\frac{2(\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)|\mu|}\frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}.
\end{aligned}\tag{7.101}$$

Zusammengefaßt ergeben (7.92), (7.100) und (7.101) schließlich

$$\begin{aligned}
|V_0|\le{}&\frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{\ln\left(\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|}{1-\omega}\right)}{|\sigma|}\\
&+\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{2|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+4\eta_2}{(1-\omega)^2|\mu|}\frac{1}{|\sigma|}+\frac{2(\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)|\mu|}\frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right)\\
&+\frac{1}{2}\eta_1\left(\frac{2|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+4\eta_2+64\kappa_2}{(1-\omega)^5|\mu|^2}\frac{1}{|\sigma|}+\frac{2(\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)|\mu|}\frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}\right)\\
\le{}&\frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{\ln\left(\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|}{1-\omega}\right)}{|\sigma|}\\
&+\frac{2\eta_1(\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)|\mu|}\frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}+\frac{2\eta_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+4\eta_1\eta_2+32\eta_1\kappa_2}{(1-\omega)^5|\mu|^2}\frac{1}{|\sigma|}.
\end{aligned}\tag{7.102}$$

Damit haben wir nun die Terme V_0 und $V_1(t)$ bis $V_3(t)$ abgeschätzt. Indem wir die Ungleichungen (7.102), (7.91), (7.78) und (7.70) zusammenfassen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&|V_0|+\sum_{j=1}^{3}|V_j(t)|\\
&\le\frac{256\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{\ln\left(\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|}{1-\omega}\right)}{|\sigma|}\\
&\quad+\frac{2\eta_1(\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)|\mu|}\frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}+\frac{2\eta_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+4\eta_1\eta_2+32\eta_1\kappa_2}{(1-\omega)^5|\mu|^2}\frac{1}{|\sigma|}\\
&\quad+\frac{18\kappa_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+576\kappa_1(\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^4}\frac{1}{|\sigma|}+\frac{18\kappa_1(\eta_1+\eta_2)}{|\mu|^3}\frac{1+\ln(|\sigma|)}{|\sigma|}
\end{aligned}$$

$$+\frac{672\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^5}\frac{\ln\left(\frac{|\mu||t|}{1-\omega}\right)+1}{|t|}+\frac{240\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_2)}{(1-\omega)^4\mu^5}\frac{1}{|t|}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Wegen $\sigma \leq t \leq t_0 < -1$ gewährleisten die an t_0 gestellten Bedingungen (7.21), daß neben

$$\frac{1}{|\sigma|} \leq \frac{1}{|t|} \leq \frac{1}{\sqrt{|t|}} \tag{7.103}$$

auch

$$\frac{\ln(|\sigma|)}{\sqrt{|\sigma|}} \leq \frac{\ln(|t|)}{\sqrt{|t|}} \leq \frac{\ln(|t_0|)}{\sqrt{|t_0|}} \leq 1 \tag{7.104}$$

und somit

$$\frac{\ln(|t|)}{|t|} \leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}, \qquad \frac{\ln(|\sigma|)}{|\sigma|} \leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}\frac{\ln(|\sigma|)}{\sqrt{|\sigma|}} \leq \frac{1}{\sqrt{|t|}} \tag{7.105}$$

für alle $t \leq t_0$ gilt. Zusammen mit (7.22) folgt aus (7.104) darüberhinaus auch

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(\frac{|\mu||t|}{1-\omega}\right)}{|t|} &= \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(\frac{\ln(|t|)}{\sqrt{|t|}}+\frac{\ln\left(\frac{|\mu|}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t|}}\right)\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(\frac{\ln(|t_0|)}{\sqrt{|t_0|}}+\frac{\ln\left(\frac{|\mu|}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t_0|}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{|t|}}\frac{\ln\left(\frac{|\mu||t_0|}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t_0|}}\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln\left(\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|}{1-\omega}\right)}{|\sigma|}\\
&\quad\leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(\frac{\ln(|\sigma|)}{\sqrt{|\sigma|}}+\frac{\ln\left(\frac{2}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|\sigma|}}+\frac{\ln\left(1+\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{2|\sigma|}\right)}{\sqrt{|\sigma|}}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(\frac{\ln(|t_0|)}{\sqrt{|t_0|}}+\frac{\ln\left(\dfrac{2}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t_0|}}+\frac{\ln\left(1+\dfrac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{2|t_0|}\right)}{\sqrt{|t_0|}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{|t|}}\frac{\ln\left(\dfrac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2|\sigma|}{1-\omega}\right)}{\sqrt{|t_0|}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

für alle $t \leq t_0$. Wir haben also $t_0 < 0$ so klein gewählt, daß sich (7.103) zu

$$|V_0|+\sum_{j=1}^{3}|V_j(t)| \leq \frac{18(\kappa_1+\eta_1)|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+2488(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2}{(1-\omega)^5\mu^5}\frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

$$\leq \frac{2488(1+\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2\big(1+|x_{-\infty}-y_{-\infty}|\big)}{(1-\omega)^5|\mu|^5}\frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$ vereinfacht. Mit (7.53) und (7.17) folgt hieraus die Behauptung.

(v) Wir beschränken uns auf den Beweis der Ungleichung (7.32), welche den Verlauf von $a(t)$ im Intervall $[\sigma, t^*]$ abschätzt. Die Gültigkeit der entsprechenden Abschätzung (7.33) für $b(t)$ in $[\sigma, t^*]$ beweist man vollkommen analog.

Ein beliebiges $t \in [\sigma, t^*]$ sei fest gewählt. Gemäß (iv) gilt

$$\big|a(t)-x_{-\infty}-u_{-\infty}t+\eta_1\ln(-t)\big|$$

$$\leq \left|\ \eta_1\ln(-t)+\frac{1}{2}\eta_1\ln\left(\frac{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2}{1-v_{-\infty}^2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}}\left[\ \frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}\ln\Big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\Big)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}\ln\Big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\Big)\ \right]\ \right|$$

$$+\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}.$$

Mit (7.72) und (7.80) folgt

$$
\begin{aligned}
&\big|a(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty} t + \eta_1 \ln(-t)\big| \\
&\leq \quad \left| \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1 - \dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} \right| \ln\left(\frac{a(t) - b(t)}{1-\omega}\right) \\
&\quad + \left| \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \frac{1 - \dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t) - \dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} \right| \ln\left(\frac{a(t) - b(t)}{1-\omega}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta_1 \left| \ln\left(-\frac{u_{-\infty} - v_{-\infty}}{1 - v_{-\infty}}\right) - \ln\left(-\frac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{t}\right)\right| \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta_1 \left| \ln\left(-\frac{u_{-\infty} - v_{-\infty}}{1 + v_{-\infty}}\right) - \ln\left(-\frac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}{t}\right)\right| \\
&\quad + \widetilde{k} \frac{1}{\sqrt{|t|}} \\
&\leq \frac{400\kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2 + \eta_1 + \eta_2)}{(1-\omega)^3 |\mu|^5} \frac{1}{|t|} \ln\left(\frac{a(t) - b(t)}{1-\omega}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta_1 \left| \ln\left(-\frac{u_{-\infty} - v_{-\infty}}{1 - v_{-\infty}}\right) - \ln\left(-\frac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{t}\right)\right| \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta_1 \left| \ln\left(-\frac{u_{-\infty} - v_{-\infty}}{1 + v_{-\infty}}\right) - \ln\left(-\frac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}{t}\right)\right| \\
&\quad + \widetilde{k} \frac{1}{\sqrt{|t|}}.
\end{aligned}
\tag{7.106}
$$

In Analogie zu (7.83) und (7.84) können wir anhand des Mittelwertsatzes und (4.22)

$$
\frac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{t} = \frac{\frac{a(t)}{t} - \frac{b(t)}{t}}{1 - \dot b(\widetilde{t}^-)}, \quad \frac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}{t} = \frac{\frac{a(t)}{t} - \frac{b(t)}{t}}{1 + \dot b(\widetilde{t}^+)}
$$

schreiben, mit gewissen

$$
\widetilde{t}^- \in \big[l_1^-(t), t\big], \quad \widetilde{t}^+ \in \big[t, l_1^+(t)\big].
$$

Weiter ergeben sich hiermit völlig analog zu (7.93)–(7.99) $\big($man ersetze lediglich

$\sigma, \widetilde{T}^-, \widetilde{T}^+$ durch $t, \widetilde{t}^-, \widetilde{t}^+\big)$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1-v_{-\infty}}\right)-\ln\left(-\frac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{t}\right)\right| \\
&\qquad \le \frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(t)}{t}-u_{-\infty}-\frac{b(t)}{t}+v_{-\infty}\right| \\
&\qquad\quad +\frac{2|u_{-\infty}-v_{-\infty}|}{(1-\omega)^2|\mu|}\left|\dot b(t)-v_{-\infty}\right|
\end{aligned} \tag{7.107}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left|\ln\left(-\frac{u_{-\infty}-v_{-\infty}}{1+v_{-\infty}}\right)-\ln\left(-\frac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{t}\right)\right| \\
&\qquad \le \frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(t)}{t}-u_{-\infty}-\frac{b(t)}{t}+v_{-\infty}\right| \\
&\qquad\quad +\frac{2|u_{-\infty}-v_{-\infty}|}{(1-\omega)^2|\mu|}\left(\left|\dot b(t)-v_{-\infty}\right|+\left|\dot b\big(l_1^+(t)\big)-\dot b(t)\right|\right).
\end{aligned} \tag{7.108}$$

Gemäß (i) und (ii) gilt

$$\begin{aligned}
\left|\dot b(t)-v_{-\infty}\right| &\le \eta_2\,\frac{1}{|\sigma|}+\frac{8\kappa_2}{(1-\omega)|\mu|^2}\,\frac{1}{|t|} \\
&\le \frac{\eta_2+8\kappa_2}{(1-\omega)|\mu|^2}\,\frac{1}{|t|}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left|\dot b(t)-v_{-\infty}\right|+\left|\dot b\big(l_1^+(t)\big)-\dot b(t)\right| &\le \frac{\eta_2+8\kappa_2}{(1-\omega)|\mu|^2}\,\frac{1}{|t|}+\frac{16\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|}\,\frac{1}{|t|} \\
&\le \frac{\eta_2+24\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|^2}\,\frac{1}{|t|}.
\end{aligned}$$

Aus (7.106), (7.107) und (7.108) folgt hiermit

$$\begin{aligned}
&\left|a(t)-x_{-\infty}-u_{-\infty}t+\eta_1\ln(-t)\right| \\
&\quad \le \frac{400\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\,\frac{1}{|t|}\ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right) \\
&\qquad +\frac{1}{2}\eta_1\left(\quad \frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(t)}{t}-u_{-\infty}-\frac{b(t)}{t}+v_{-\infty}\right|\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + \frac{4}{(1-\omega)^2|\mu|}\frac{\eta_2+8\kappa_2}{(1-\omega)|\mu|^2}\frac{1}{|t|}\Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{2}\eta_1\Bigg(\frac{2}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(t)}{t}-u_{-\infty}-\frac{b(t)}{t}+v_{-\infty}\right| \\
&\qquad\qquad + \frac{4}{(1-\omega)^2|\mu|}\frac{\eta_2+24\kappa_2}{(1-\omega)^3|\mu|^2}\frac{1}{|t|}\Bigg) \\
&\quad + \widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}. \\
&\leq \frac{400\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\frac{1}{|t|}\ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right) \\
&\quad + \frac{2\eta_1}{(1-\omega)|\mu|}\left|\frac{a(t)}{t}-u_{-\infty}-\frac{b(t)}{t}+v_{-\infty}\right| \\
&\quad + \frac{64\eta_1(\eta_2+\kappa_2)}{(1-\omega)^5|\mu|^3}\frac{1}{|t|}+\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}.
\end{aligned}
\tag{7.109}
$$

Wir müssen nun noch $a(t)-b(t)$ sowie $|a(t)/t-u_{-\infty}-b(t)/t+v_{-\infty}|$ abschätzen. Es sei nach wie vor $t \in [\sigma, t^*]$ beliebig, aber fest. Aus (iv) ergibt sich mit Hilfssatz 5.1 und (7.71) sowie (7.40) und (6.8)

$$
\begin{aligned}
a(t) &\leq x_{-\infty}+u_{-\infty}t+\frac{1}{2}\eta_1\ln\left(\frac{(u_{-\infty}-v_{-\infty})^2}{1-v_{-\infty}^2}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\kappa_1\big(1-\dot a(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \\
&\qquad \times\Bigg[\frac{1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}\ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{2}\right) \\
&\qquad\quad +\frac{1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot a(t)-\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}\ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{2}\right)\Bigg] \\
&\quad +\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}} \\
&\leq x_{-\infty}+u_{-\infty}t+\frac{1}{2}\eta_1\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right)+\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}
\end{aligned}
\tag{7.110}
$$

sowie analog

$$b(t) \geq y_{-\infty} + v_{-\infty}t - \frac{1}{2}\eta_2 \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) - \widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}, \tag{7.111}$$

zusammen also

$$\begin{aligned} a(t) - b(t) &\leq x_{-\infty} - y_{-\infty} + (u_{-\infty} - v_{-\infty})t \\ &\qquad + \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + \frac{1}{2}\eta_2 \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}} \\ &\leq |x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2) \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}. \end{aligned} \tag{7.112}$$

Wir verwenden dies, um aus (iv) gemeinsam mit (7.72) und (iii)

$$\begin{aligned} a(t) &\geq x_{-\infty} + u_{-\infty}t + \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{(u_{-\infty} - v_{-\infty})^2}{1 - v_{-\infty}^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\kappa_1 \big(1 - \dot{a}(t)^2\big)^{\frac{3}{2}} \\ &\qquad \times \left[\frac{1 - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2} \ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1 - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)^2}{\Big(\dot{a}(t) - \dot{b}\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2} \ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right) \right] \\ &\quad - \widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}} \\ &\geq x_{-\infty} + u_{-\infty}t - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\kappa_1 \left[\frac{1}{\mu^2} + \frac{4}{\mu^2}\right] \ln\left(\frac{a(t)-b(t)}{1-\omega}\right) - \widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}} \\ &\geq x_{-\infty} + u_{-\infty}t - \frac{1}{2}\eta_1 \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + \frac{5\kappa_1}{2\mu^2}\ln(1-\omega) \\ &\quad - \frac{5\kappa_1}{2\mu^2} \ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right) \\ &\quad - \widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}} \end{aligned} \tag{7.113}$$

sowie analog

$$
\begin{aligned}
b(t) \leq\ & y_{-\infty} + v_{-\infty} t + \frac{1}{2}\eta_2 \ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) - \frac{5\kappa_2}{2\mu^2}\ln(1-\omega) \\
& + \frac{5\kappa_2}{2\mu^2}\ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right) \\
& + \widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}
\end{aligned} \tag{7.114}
$$

zu schließen. Die Ungleichungen (7.110), (7.111), (7.113) und (7.114) ergeben

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{a(t)}{t} - u_{-\infty} - \frac{b(t)}{t} + v_{-\infty}\right| \\
& \quad \leq |x_{-\infty} - y_{-\infty}|\,\frac{1}{|t|} + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right)\frac{1}{|t|} + \frac{5(\kappa_1+\kappa_2)\big|\ln(1-\omega)\big|}{2\mu^2}\,\frac{1}{|t|} \\
& \qquad + \frac{5(\kappa_1+\kappa_2)}{2\mu^2}\frac{1}{|t|}\ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right) \\
& \qquad + 2\widetilde{k}\frac{1}{|t|^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Wir setzen dies sowie (7.112) in (7.109) ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
& \big|a(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty} t + \eta_1 \ln(-t)\big| \\
& \quad \leq \frac{400\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)\big|\ln(1-\omega)\big|}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\,\frac{1}{|t|} \\
& \qquad + \frac{400\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\,\frac{1}{|t|} \\
& \qquad\qquad \times \ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right) \\
& \qquad + \frac{2\eta_1}{(1-\omega)|\mu|}\,\frac{1}{|t|} \\
& \qquad\qquad \times \left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + \frac{5(\kappa_1+\kappa_2)\big|\ln(1-\omega)\big|}{2\mu^2}\right) \\
& \qquad + \frac{5\eta_1(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)|\mu|^3}\,\frac{1}{|t|}
\end{aligned}
$$

$$\times \ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right)$$

$$+\frac{4\eta_1\widetilde{k}}{(1-\omega)|\mu|}\,\frac{1}{|t|^{3/2}} + \frac{64\eta_1(\eta_2+\kappa_2)}{(1-\omega)^5|\mu|^3}\,\frac{1}{|t|} + \widetilde{k}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

$$\leq \frac{470(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right) + 2\eta_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{(1-\omega)^5|\mu|^5}\,\frac{1}{|t|}$$

$$+\frac{405(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\,\frac{1}{|t|}$$

$$\times \ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right)$$

$$+\frac{4\eta_1\widetilde{k}}{(1-\omega)|\mu|}\,\frac{1}{|t|^{3/2}} + \widetilde{k}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}.$$

Indem wir

$$\ln\left(|x_{-\infty} - y_{-\infty}| + 2|t| + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right) + 2\widetilde{k}\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln(|t|)$$

$$+\ln\left(1 + \frac{1}{2}|x_{-\infty} - y_{-\infty}|\,\frac{1}{|t|} + \frac{1}{4}(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega^2}\right)\frac{1}{|t|} + \widetilde{k}\frac{1}{|t|^{3/2}}\right)$$

$$\leq 1 + \ln(|t|) + |x_{-\infty} - y_{-\infty}|\,\frac{1}{|t|} + (\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right)\frac{1}{|t|} + \widetilde{k}\frac{1}{|t|^{3/2}}$$

verwenden, ergibt sich

$$\big|a(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty}t + \eta_1\ln(-t)\big|$$

$$\leq \frac{470(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right) + 2\eta_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{(1-\omega)^5|\mu|^5}\,\frac{1}{|t|}$$

$$+\frac{405(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\left(\frac{1}{|t|} + \frac{\ln(|t|)}{|t|} + |x_{-\infty} - y_{-\infty}|\,\frac{1}{|t|^2}\right.$$

$$\left.+(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right)\frac{1}{|t|^2} + \widetilde{k}\frac{1}{|t|^{5/2}}\right)$$

$$+\frac{4\eta_1\widetilde{k}}{(1-\omega)|\mu|}\,\frac{1}{|t|^{3/2}}+\widetilde{k}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}.$$

Wegen (7.103) und (7.105) folgt

$$\begin{aligned}
&\big|a(t)-x_{-\infty}-u_{-\infty}t+\eta_1\ln(-t)\big|\\
&\quad\le\frac{470(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right)+2\eta_1|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{(1-\omega)^5|\mu|^5}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}\\
&\qquad+\frac{405(\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^2}{(1-\omega)^3|\mu|^5}\\
&\qquad\quad\times\left(2+|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+(\eta_1+\eta_2)\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right)+\widetilde{k}\right)\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}\\
&\qquad+\frac{4\eta_1\widetilde{k}}{(1-\omega)|\mu|}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}+\widetilde{k}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}\\
&\quad\le\frac{1785(1+\kappa_1+\kappa_2+\eta_1+\eta_2)^3\left(\ln\left(\frac{4}{1-\omega}\right)+|x_{-\infty}-y_{-\infty}|+\widetilde{k}\right)}{(1-\omega)^5|\mu|^5}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}.
\end{aligned}$$

Mit (7.17) und (7.18) entspricht dies der Behauptung.

(vi) Gemäß (v) gilt

$$\begin{aligned}
&a(t)-b(t)\\
&\quad\ge(x_{-\infty}-y_{-\infty})+(u_{-\infty}-v_{-\infty})t-(\eta_1+\eta_2)\ln(-t)-2k\,\frac{1}{\sqrt{|t|}}\\
&\quad\ge\mu t+\sqrt{|t|}\left(-\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{\sqrt{|t|}}+|\mu|\sqrt{|t|}-(\eta_1+\eta_2)\frac{\ln(|t|)}{\sqrt{|t|}}-2k\frac{1}{|t|}\right)
\end{aligned}$$

für alle $t\in[\sigma,t^*]$, und wegen $t\le t^*\le t_0<0$, (7.103), (7.104) sowie der Eigenschaft (7.23) von t_0 folgt

$$\begin{aligned}
&a(t)-b(t)\\
&\quad\ge\mu t+\sqrt{|t|}\left(-\frac{|x_{-\infty}-y_{-\infty}|}{\sqrt{|t_0|}}+|\mu|\sqrt{|t_0|}-(\eta_1+\eta_2)\frac{\ln(|t_0|)}{\sqrt{|t_0|}}-2k\frac{1}{|t_0|}\right)\\
&\quad>\mu t
\end{aligned}$$

für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Gemäß (i) gilt weiterhin für alle $t \in [\sigma, t^*]$

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) - \dot{b}(t) &< u_{-\infty} - v_{-\infty} + (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{|\sigma|} + \frac{8(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)\mu^2}\,\frac{1}{|t|} \\ &< 2\mu + \frac{8(\kappa_1+\kappa_2)}{(1-\omega)\mu^2}\,\frac{1}{|t_0|},\end{aligned}$$

und wegen der Eigenschaft (7.24) von t_0 folgt $\dot{a}(t) - \dot{b}(t) < \mu$ für alle $t \in [\sigma, t^*]$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Nun beweisen wir abschließend den Hilfssatz 7.2.

Beweis von Hilfssatz 7.2. Wir verwenden Hilfssatz 7.5. Es sei $t_0 < -1$ derart, daß die Bedingungen (7.19)–(7.24) erfüllt sind. Ein solches t_0 existiert offensichtlich, denn die Ungleichungen (7.19)–(7.24) haben allesamt Gültigkeit, wenn $t_0 < -1$ hinreichend klein ist. Ferner habe $n_0 \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft, daß $\sigma_n < t_0 < \tau_n$ für alle $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt. Aufgrund der Voraussetzung (7.1) existiert ein solches n_0. Wir zeigen nun, daß bei derart gewähltem $t_0 < -1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $t \leq t_0$ und alle $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) die Ungleichungen (7.8) gelten. Es sei also ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Wir zeigen zunächst, daß

$$\left.\begin{aligned} a_n(t) - b_n(t) &> \mu t, \\ \dot{a}_n(t) - \dot{b}_n(t) &< \mu \end{aligned}\right\} \quad \text{für } t \in [\sigma_n, t_0] \tag{7.115}$$

gilt. Hierzu betrachten wir die Menge

$$\mathcal{N} := \bigl\{ t \in [\sigma_n, t_0] \bigm| a_n(t) - b_n(t) \leq \mu t \ \vee\ \dot{a}_n(t) - \dot{b}_n(t) \geq \mu \bigr\}. \tag{7.116}$$

Wir nehmen an, daß $\mathcal{N}$ nicht leer ist und wollen diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Wegen der Stetigkeit von $a_n,\ b_n,\ \dot{a}_n$ und $\dot{b}_n$ ist $\mathcal{N}$ kompakt. Es sei $t^* := \min \mathcal{N}$. Nach Hilfssatz 7.5 (vgl. (7.25)) gilt aufgrund von $\sigma_n < t_0 < \tau_n$

$$a_n(\sigma_n) - b_n(\sigma_n) > \mu\sigma_n, \qquad \dot{a}_n(\sigma_n) - \dot{b}_n(\sigma_n) < \mu,$$

und der Definition von t^* gemäß muß daher $t^* > \sigma_n$ sein sowie

$$a_n(t) - b_n(t) \geq \mu t, \qquad \dot{a}_n(t) - \dot{b}_n(t) \leq \mu \qquad \text{für alle } t \in [\sigma_n, t^*]$$

gelten. Also ist in Hilfssatz 7.5 die Voraussetzung (7.26) für die Gültigkeit der Abschätzungen (7.27)–(7.34) im Intervall $[\sigma_n, t^*]$ erfüllt. Daher gilt insbesondere

$$a_n(t^*) - b_n(t^*) > \mu t^*, \qquad \dot{a}_n(t^*) - \dot{b}_n(t^*) < \mu$$

und folglich $t^* \notin \mathcal{N}$. Dies aber steht im Widerspruch zur Definition von t^* als Minimum der Menge $\mathcal{N}$. Damit haben wir die Annahme $\mathcal{N} \neq \emptyset$ widerlegt und

(7.115) gezeigt. Jetzt wenden wir Hilfssatz 7.5 erneut an: aus (7.115) folgt die Gültigkeit der Abschätzungen (7.27)–(7.34) für alle $t \in [\sigma_n, t_0]$. $\big($In (7.26) tritt dabei jetzt t_0 an die Stelle von t^*.$\big)$ Gemäß (7.32) und (7.33) gilt also insbesondere

$$\left.\begin{aligned} \big|a_n(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty}t + \eta_1 \ln(-t)\big| &\le k\frac{1}{\sqrt{|t|}}, \\ \big|b_n(t) - y_{-\infty} - v_{-\infty}t - \eta_2 \ln(-t)\big| &\le k\frac{1}{\sqrt{|t|}} \end{aligned}\right\} \quad \big(t \in [\sigma_n, t_0]\big), \tag{7.117}$$

mit k definiert durch (7.18). Nun müssen wir noch den Fall $t < \sigma_n$ betrachten. Gemäß (7.4) und (6.2) gilt

$$\left.\begin{aligned} a_n(t) - x_{-\infty} - u_{-\infty}t + \eta_1 \ln(-t) &= 0, \\ b_n(t) - y_{-\infty} - v_{-\infty}t - \eta_2 \ln(-t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \big(t < \sigma_n\big). \tag{7.118}$$

Aus (7.117) und (7.118) zusammen folgt die Behauptung. □

Anhang

In diesem Anhang demonstrieren wir, wie sich aus dem kovarianten Kraftgesetz (2.1) die Bewegungsgleichungen (WF_0) ergeben, wenn N, die Zahl der Teilchen, zwei beträgt und die Bewegung der beiden Teilchen in einer Raumdimension verläuft, d.h. entlang einer Geraden im $\mathbb{R}^3$.

Die Weltlinien der beiden betrachteten Punktladungen seien mit $z_{(1)}$ und $z_{(2)}$ bezeichnet. Als erstes gehen wir zu physikalischen Einheiten über, in denen der Lichtgeschwindigkeit c der Wert Eins zukommt. Sodann zeichnen wir ein Koordinatensystem aus und nehmen eine Umparametrisierung der Weltlinien vor. Diese seien nicht mehr nach ihrer jeweiligen Eigenzeit τ_i, sondern nach der Zeitkoordinate t des ausgezeichneten Koordinatensystems parametrisiert. Der Zusammenhang zwischen τ_i und t ist durch

$$t = z^0_{(i)}(\tau_i) \quad \text{bzw.} \quad \tau_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

gegeben. Die Umkehrfunktionen $\varphi_i := (z^0_{(i)})^{-1}$ $(i = 1, 2)$ sind streng monoton wachsende Bijektionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Bewegung der Teilchen entlang der x^1-Achse des betrachteten Koordinatensystems verläuft. Die Parametrisierung der Weltlinien lautet dann

$$z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big) = \big(t, a(t), 0, 0\big), \qquad z_{(2)}\big(\varphi_2(t)\big) = \big(t, b(t), 0, 0\big),$$

wobei $a(t)$ bzw. $b(t)$ die Ortskoordinaten der beiden Teilchen als Funktionen der Zeit t bezeichnen. Die Bewegungsgleichung

$$m_1 \ddot{z}^\mu_{(1)}(\tau_i) = e_1 \frac{1}{2}\Big(F^{\mu\nu}_{(2)\mathrm{ret}}\big(z_{(1)}(\tau_1)\big) + F^{\mu\nu}_{(2)\mathrm{adv}}\big(z_{(1)}(\tau_1)\big)\Big)\dot{z}_{(1)\nu}(\tau_1)$$

des ersten Teilchens läßt sich nun, wenn man die aus der Definition der Eigenzeit folgende Gleichheit $\dot{\varphi}_1(t) = \sqrt{1 - \dot{a}(t)^2}$ beachtet, in der Form

$$m_1 \frac{d}{dt}\frac{\dot{a}(t)}{\sqrt{1 - \dot{a}(t)^2}} = e_1 \frac{1}{2}\Big(F^{10}_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) + F^{10}_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)\Big) \tag{A.1}$$

schreiben. Die Liénard-Wiechert-Potentiale des zweiten Teilchens lauten

$$A_{(2)\mathrm{ret}}(x) = e_2 \frac{\big(1, \dot{b}(t_{2\mathrm{ret}}), 0, 0\big)}{(t - t_{2\mathrm{ret}}) - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{ret}})\big)\dot{b}(t_{2\mathrm{ret}})},$$

$$A_{(2)\mathrm{adv}}(x) = e_2 \frac{\big(1, \dot{b}(t_{2\mathrm{adv}}), 0, 0\big)}{(t - t_{2\mathrm{adv}}) - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{adv}})\big)\dot{b}(t_{2\mathrm{adv}})}.$$

Dabei sind die retardierten bzw. avancierten Zeiten $t_{2\mathrm{ret}}$ und $t_{2\mathrm{adv}}$ als Funktionen von x implizit durch

$$t_{2\mathrm{ret}}(x) = t - \sqrt{\Big(x^1 - b\big(t_{2\mathrm{ret}}(x)\big)\Big)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

$$t_{2\mathrm{adv}}(x) = t + \sqrt{\Big(x^1 - b\big(t_{2\mathrm{adv}}(x)\big)\Big)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

gegeben. Wir setzen

$$l_1^-(t) := t_{2\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big), \qquad l_1^+(t) := t_{2\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big).$$

Es gilt folglich

$$l_1^-(t) = t - \Big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\Big|, \qquad l_1^+(t) = t + \Big|a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\Big|.$$

Mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial t}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) = \frac{1}{1 - \dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)},$$

$$\frac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial x^1}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) = -\frac{\dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}}{1 - \dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^-(t)\big)},$$

$$\frac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial t}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) = \frac{1}{1 + \dfrac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)},$$

$$\frac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial x^1}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) = \frac{\dfrac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\big|}}{1 + \dfrac{a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot{b}\big(l_1^+(t)\big)}.$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} F^{10}_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) &= \partial^1 A^0_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) - \partial^0 A^1_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^1} A^0_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) - \frac{\partial}{\partial t} A^1_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^1} A^0_{(2)\mathrm{ret}}$$

$$= -e_2 \frac{-\dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial x^1} - \left(1 - \dot b(t_{2\mathrm{ret}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial x^1}\right)\dot b(t_{2\mathrm{ret}}) - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{ret}})\big)\ddot b(t_{2\mathrm{ret}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial x^1}}{\Big((t - t_{2\mathrm{ret}}) - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{ret}})\big)\dot b(t_{2\mathrm{ret}})\Big)^2}$$

und folglich

$$\frac{\partial}{\partial x^1} A^0_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)$$

$$= e_2 \frac{\dot b\big(l_1^-(t)\big) - \dfrac{\dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}}{1 - \dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\Big(1 - \dot b\big(l_1^-(t)\big)^2\Big)}{\Big(\big(t - l_1^-(t)\big) - \big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}$$

$$-e_2 \frac{\dfrac{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}{1 - \dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\ddot b\big(l_1^-(t)\big)}{\Big(\big(t - l_1^-(t)\big) - \big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} A^1_{(2)\mathrm{ret}} = e_2 \frac{\ddot b(t_{2\mathrm{ret}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial t}}{(t - t_{2\mathrm{ret}}) - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{ret}})\big)\dot b(t_{2\mathrm{ret}})}$$

$$-e_2 \dot b(t_{2\mathrm{ret}}) \frac{1 - \dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial t} + \dot b(t_{2\mathrm{ret}})^2\dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial t} - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{ret}})\big)\ddot b(t_{2\mathrm{ret}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{ret}}}{\partial t}}{\Big((t - t_{2\mathrm{ret}}) - \big(x^1 - b(t_{2\mathrm{ret}})\big)\dot b(t_{2\mathrm{ret}})\Big)^2}$$

und folglich

$$\frac{\partial}{\partial t} A^1_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)$$

$$= e_2 \frac{-\dot b\big(l_1^-(t)\big) - \dfrac{\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1 - \dfrac{a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\Big(1 - \dot b\big(l_1^-(t)\big)^2\Big)}{\Big(\big(t - l_1^-(t)\big) - \big(a(t) - b\big(l_1^-(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}$$

$$+e_2\frac{\dfrac{t-l_1^-(t)}{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\ddot b\big(l_1^-(t)\big)}{\Big(\big(t-l_1^-(t)\big)-\big(a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^-(t)\big)\Big)^2}.$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&F^{10}_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)\\
&\quad= -\frac{\partial}{\partial x^1}\,A^0_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)-\frac{\partial}{\partial t}A^1_{(2)\mathrm{ret}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)\\
&\quad= e_2\frac{\dfrac{\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}-\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\Big(1-\dot b\big(l_1^-(t)\big)^2\Big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|^2\left(1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)\right)^2} \qquad \text{(A.2)}\\
&\quad= e_2\frac{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\,\frac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|^3}.
\end{aligned}$$

Analog gehen wir bei der Berechnung von

$$\begin{aligned}
F^{10}_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) &= \partial^1 A^0_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)-\partial^0 A^1_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x^1}\,A^0_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)-\frac{\partial}{\partial t}A^1_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)
\end{aligned}$$

vor. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^1}\,A^0_{(2)\mathrm{adv}}\\
&\quad= -e_2\frac{-\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial x^1}-\left(1-\dot b(t_{2\mathrm{adv}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial x^1}\right)\dot b(t_{2\mathrm{adv}})-\big(x^1-b(t_{2\mathrm{adv}})\big)\ddot b(t_{2\mathrm{adv}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial x^1}}{\Big(\big(t-t_{2\mathrm{adv}}\big)-\big(x^1-b(t_{2\mathrm{adv}})\big)\dot b(t_{2\mathrm{adv}})\Big)^2}
\end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\, A^0_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)$$

$$= e_2 \frac{\dot b\big(l_1^+(t)\big) + \dfrac{\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\Big(1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2\Big)}{\Big(\big(t-l_1^+(t)\big)-\big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}$$

$$+e_2 \frac{\dfrac{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\ddot b\big(l_1^+(t)\big)}{\Big(\big(t-l_1^+(t)\big)-\big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\, A^1_{(2)\mathrm{adv}}$$

$$= e_2 \frac{\ddot b(t_{2\mathrm{adv}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial t}}{(t-t_{2\mathrm{adv}})-\big(x^1-b(t_{2\mathrm{adv}})\big)\dot b(t_{2\mathrm{adv}})}$$

$$-e_2\dot b(t_{2\mathrm{adv}})\frac{1-\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial t}+\dot b(t_{2\mathrm{adv}})^2\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial t}-\big(x^1-b(t_{2\mathrm{adv}})\big)\ddot b(t_{2\mathrm{adv}})\dfrac{\partial t_{2\mathrm{adv}}}{\partial t}}{\Big((t-t_{2\mathrm{adv}})-\big(x^1-b(t_{2\mathrm{adv}})\big)\dot b(t_{2\mathrm{adv}})\Big)^2}$$

und folglich

$$\frac{\partial}{\partial t}\, A^1_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)$$

$$= e_2 \frac{-\dot b\big(l_1^+(t)\big) - \dfrac{\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\Big(1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2\Big)}{\Big(\big(t-l_1^+(t)\big)-\big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}$$

$$+e_2 \frac{\dfrac{t-l_1^+(t)}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\ddot b\big(l_1^+(t)\big)}{\Big(\big(t-l_1^+(t)\big)-\big(a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big)\dot b\big(l_1^+(t)\big)\Big)^2}.$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&F^{10}_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x^1}\,A^0_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big) - \frac{\partial}{\partial t}A^1_{(2)\mathrm{adv}}\Big(z_{(1)}\big(\varphi_1(t)\big)\Big)\\
&= e_2\frac{\dfrac{\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}+\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\Big(1-\dot b\big(l_1^+(t)\big)^2\Big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|^2\left(1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)\right)^2}\\
&= e_2\frac{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\,\frac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|^3}.
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

Aus (A.1), (A.2) und (A.3) erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{d}{dt}\frac{\dot a(t)}{\sqrt{1-\dot a(t)^2}} = e_1e_2\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^-(t)\big)}\,\frac{a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^-(t)\big)\big|^3}\\
&+\frac{1-\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}{1+\dfrac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|}\dot b\big(l_1^+(t)\big)}\,\frac{a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)}{\big|a(t)-b\big(l_1^+(t)\big)\big|^3}\Bigg],
\end{aligned}
$$

und dies entspricht der ersten Gleichung in (WF_0). Ebenso leitet man auch die zweite Gleichung in (WF_0) her. Damit haben wir gezeigt, wie sich im Falle zweier Punktladungen, deren Bewegung in einer Raumdimension verläuft, aus dem kovarianten Kraftgesetz (2.1) die Bewegungsgleichungen (WF_0) ergeben.

Bezeichnungen

Im folgenden stellen wir eine Reihe von Bezeichnungen zusammen, die im laufenden Text ohne weitere Erklärung verwendet werden.

Mit $\mathbb{N}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ (ohne die Null) und mit $\mathbb{R}$ diejenige der reellen Zahlen bezeichnet. Intervalle reeller Zahlen bezeichnen wir wie üblich mit $[\sigma,\tau]$, $]\sigma,\tau[$, $[\sigma,\tau[$ und $]\sigma,\tau]$. In derselben Weise werden ∞ und $-\infty$ zur Bezeichnung unbeschränkter Intervalle benutzt. Dagegen steht (a,b) niemals für ein offenes Intervall, sondern stets für das geordnete Paar zweier Elemente a und b.

Ist $f\colon D \to E$ eine Funktion, so wird mit $\operatorname{graph} f$ der Graph von f bezeichnet, also die Menge aller Paare $\bigl(x, f(x)\bigr) \in D \times E$ mit $x \in D$. Ist $A \subset D$, so heißt $g = f|_A$ die Restriktion von f auf A. Für diese Funktion $g\colon A \to E$ gilt also $g(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Es ist

$$f(A) := \bigl\{ y \in E \mid \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } y = f(x) \bigr\}$$

die Bildmenge von A unter f. Der Träger einer auf $\mathbb{R}^n$ erklärten Funktion f ist die abgeschlossene Hülle aller Punkte in $\mathbb{R}^n$, an denen f nicht verschwindet. Er wird mit

$$\operatorname{supp} f := \overline{\bigl\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0 \bigr\}}$$

bezeichnet.

Für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist $C(J, \mathbb{R}^n)$ die Klasse der stetigen Funktionen von J nach $\mathbb{R}^n$. Die Klasse der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von J nach $\mathbb{R}^n$ wird mit $C^k(J, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Es ist $C^0(J, \mathbb{R}^n) = C(J, \mathbb{R}^n)$. Im Falle $n = 1$ schreiben wir $C^k(J)$ anstatt $C^k(J, \mathbb{R}^1)$. Zudem setzen wir

$$C^\infty(J) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(J).$$

Es steht $C_0^\infty(\mathbb{R})$ für die Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R})$ mit kompakten Träger.

Wir schreiben $\bigl(C^k(J)\bigr)^2$ für die Menge $C^k(J) \times C^k(J)$ aller geordneten Paare aus $C^k(J)$, d.h.

$$\bigl(C^k(J)\bigr)^2 := \bigl\{ \phi = (a,b) \mid a, b \in C^k(J) \bigr\}.$$

Bisweilen identifizieren wir $\bigl(C^k(J)\bigr)^2$ mit $C^k(J, \mathbb{R}^2)$, etwa wenn wir mit $A \subset J$ und $\phi = (a,b) \in \bigl(C^k(J)\bigr)^2$ an Stelle von $(a|_A, b|_A)$ kurz $\phi|_A$ schreiben.

Alle in dieser Arbeit auftretenden Integrale sind Riemann-Integrale.

In Kapitel I und im Anhang bezeichnen wir Elemente des Minkowski-Raumes mit $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ und ihre Komponenten also mit x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Der Minkowski-Raum selbst ist der lineare Raum $\mathbb{R}^4$, versehen mit der durch

$$\langle x, y \rangle := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

gegebenen Pseudometrik. Es gilt

$$x^0 = x_0, \quad x^i = -x_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wir verwenden die Summenkonvention, nach welcher über doppelt auftretende griechische Indizes zu summieren ist, also etwa $\langle x, y \rangle = x^\mu y_\mu$. Von x abhängige Vektorfelder j und Tensorfelder F auf dem Minkowski-Raum haben die Komponenten j^μ und $F^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$).

Das Zeichen $\square$ signalisiert das Ende eines Beweises. Hinweise der Form [1] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Literaturverzeichnis

[1] J.A. Wheeler, R.P. Feynman, *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation*, Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945).

[2] J.A. Wheeler, R.P. Feynman, *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action*, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949).

[3] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley & Sons (1975).

[4] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover (1980).

[5] P.A.M. Dirac, *Classical Theory of Radiating Electrons*, Proc. Roy. Soc. **A178**, 148 (1938).

[6] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley (1990).

[7] F. Hoyle, J.V. Narlikar, *Cosmology and Action-at-a-Distance Electrodynamics*, Rev. Mod. Phys. **67**, 113 (1995).

[8] A. Schild, *Electromagnetic Two-Body Problem*, Phys. Rev. **131**, 2762 (1963).

[9] R.D. Driver, *A "Backwards" Two-Body Problem of Classical Relativistic Electrodynamics*, Phys. Rev. **178**, 2051 (1968).

[10] P. Stephas, *Analytic Solutions for Wheeler-Feynman Interaction*, J. Math. Phys. **33**, 612 (1992).

[11] J.L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press (1967).

[12] H. Van Dam, E.P. Wigner, *Classical Relativistic Mechanics of Interacting Point Particles*, Phys. Rev **138**, 1576 (1965).

[13] J. Mallet-Paret, private Mitteilung (1996).
R.D. Nussbaum, private Mitteilung (1996).
H.-O. Walther, private Mitteilung (1996).

[14] W. Walter, *Analysis II*, Springer (1991).

[15] A. Georgescu, *Asymptotic Treatment of Differential Equations*, Chapman & Hall (1995).

[16] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer (1985).