MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
28.05.2018

Übungsblatt 8
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRE DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 29.05.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $S \subseteq V$ des angegebenen K-Vektorraums V linear unabhängig sind. Falls ja, weisen Sie dies nach, ansonsten stellen Sie einen (von Ihnen gewählten) Vektor $v \in S$ als Linearkombination von $S \setminus \{v\}$ dar.

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, i), (i, 1), (2, 0)\}$

(ii) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, i), (i, 1), (2, 0)\}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $S = \{f, g, h\}$ mit $f(x) = 2x$, $g(x) = x - 3$, $h = x^2$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und seien S, T linear unabhängige Teilmengen von V.

(i) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Gleichung $\mathrm{span}(S) \cap \mathrm{span}(T) = \mathrm{span}(S \cap T)$ im Allgemeinen falsch ist.

(ii) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

(I) Die Menge $S \cup T$ ist linear unabhängig, und es gilt $S \cap T = \varnothing$.

(II) Es gilt $\mathrm{span}(S \cup T) = \mathrm{span}(S) \oplus \mathrm{span}(T)$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper, $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen und $\{b_1, ..., b_n\}$ ein Erzeugendensystem von V. Zeigen Sie:

(i) ϕ ist surjektiv $\Rightarrow \{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\}$ ist Erzeugendensystem von W

(ii) $\big(\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j : \phi(b_i) \neq \phi(b_j)$ und $\{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\} \subseteq W$ ist linear unabhängig$\big)$
$\Rightarrow \phi$ ist injektiv.

Sei K ein Körper und $A := (a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}) \in K^{m \times n}$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $a_{\cdot j}$ den j-ten Spaltenvektor von A bezeichnet. Folgern Sie aus (i) und (ii):

(iii) $\big(\forall b \in K^m \exists x \in K^n : Ax = b\big) \Rightarrow \{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\}$ Erzeugendensystem von K^m

(iv) $\big(\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j : a_{\cdot i} \neq a_{\cdot j}$ und $\{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\} \subseteq K^m$ ist linear unabhängig$\big)$
$\Rightarrow \big(\forall x \in K^n : (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)\big)$.