SoSe 2018
21.05.2018

Übungsblatt 7
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRE DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Einen Lösungsvorschlag zu diesen Aufgaben finden Sie (passwortgeschützt) auf der Vorlesungsseite. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, außerdem $v \in V$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Sei außerdem $W \subseteq V$ gegeben durch $W = \{u + v \mid u \in U\}$.

(i) Weisen Sie nach, dass durch

$$\begin{array}{lcl} \oplus : W \times W \to V & , & (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2 - v \\ * : K \times W \to V & , & (\lambda, v_1) \mapsto \lambda v_1 + (1 - \lambda) v \end{array}$$

Abbildungen $W \times W \to W$ und $K \times W \to W$ gegeben sind, und dass es sich bei $(W, \oplus, *)$ um einen K-Vektorraum handelt.

(ii) Gegeben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass W ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 2

Sei $I = [a, b]$ mit $a < 0 < b$ und $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ versehen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen. Sei zudem die Menge der reellen Polynome von Grad kleiner gleich $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\mathcal{P}_n := \big\{ p : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \big\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$\varphi_n(v) = p \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Big(v = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} \hat{e}_k \ \wedge\ \big(\forall x \in I : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \big),\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \Big)$$

wohldefiniert und ein Monomorphismus ist, wobei $\hat{e}_k$ den k-ten Einheitsvektor bezeichnet. Zeigen Sie zudem $\varphi_n(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{P}_n$ und folgern Sie, dass $\mathcal{P}_n$ einen Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ darstellt.

(ii) Sein nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass durch

$$T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1},\ p \mapsto T := \big(I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x p(t) dt \big)$$

eine lineare Abbildung definiert ist und bestimmen Sie ihr Bild $T(\mathcal{P}_n)$ sowie den Kern $\ker(T)$.

(iii) Die Abbildung $\phi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ mit $\phi_n(v) := \varphi_n(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, die man durch Einschränkung der Zielmenge von φ_n auf das Bild $\varphi_n(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{P}_n$ erhält, stellt offenbar einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen dar mit Umkehrabbildung $\phi_n^{-1} : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+1)}$ existiert mit der Eigenschaft, dass $(\phi_{n+1}^{-1} \circ T \circ \phi_n)(v) = Av, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und geben Sie diese an.

Aufgabe 3

Sei $I := [-1, 1]$ und $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ versehen mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen.

(i) Zeigen Sie, dass die Teilmenge der geraden Abbildungen

$$\mathcal{G} := \big\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) : \big(\forall x \in I : f(x) = f(-x)\big)\big\}$$

einen Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ bildet.

(ii) Sei nun zusätzlich die Teilmenge der ungeraden Funktionen

$$\mathcal{U} := \big\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) : \big(\forall x \in I : f(x) = -f(-x)\big)\big\}$$

gegeben, wobei Sie diesmal ohne Beweis annehmen dürfen, dass diese einen Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ darstellt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ durch die direkte Summe von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ gegeben ist, also $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{G} \oplus \mathcal{U}$.