MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
14.05.2018

Übungsblatt 6 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 15.05.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ isomorph im Sinne von Vektorräumen sind.

Aufgabe 2
Sei $\emptyset \neq I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}_0$, die Menge der auf I $n-$mal stetig differenzierbaren Funktionen.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}_0$, Vektorräume sind und die Abbildung

$$\begin{aligned} D:\ &\mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^{n-1} \\ &f \mapsto (x \mapsto \frac{df(x)}{dx}) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 3
Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(i) Für einen Homomorphismus $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen sei die Abbildung $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ definiert durch $g(v) = f(v) - if(iv)$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass g ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.

(ii) Sei nun umgekehrt $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ein Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $g(v) = f(v) - if(iv)$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Aufgabe 4

(a) Gegeben seien die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume V und Teilmengen $U \subseteq V$. Entscheiden Sie, in welchen Fällen U ein Untervektorraum von V ist.
   (i) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V \mid f(x,y) + f(x+1,y) = 0\}$
   (ii) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V \mid f(x+1,y) = f(x,y) + 1\}$
   (iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U = \{A \in V \mid AB = \mathrm{O}_2\}$, wobei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

(b) In Aufgabe 1 haben Sie gesehen, dass $V = \mathbb{C}^2$ sowohl als $\mathbb{R}$- als auch als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet werden kann. Finden Sie eine Teilmengen $U \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass U zwar ein Untervektorraum von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber kein Untervektorraum von V ist, wenn V als $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefasst wird.