MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
30.04.2018

Übungsblatt 4
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Die Zentralübung am 1. Mai entfällt aufgrund des Feiertags. Die Musterlösung finden Sie auf UniWorxs sowie (passwortgeschützt) auf der Homepage der Vorlesung. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen; Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Seien $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ und $A_1 \in \mathbb{K}^{m\times p}, A_2 \in \mathbb{K}^{m\times q}, B_1 \in \mathbb{K}^{n\times p}, B_2 \in \mathbb{K}^{n\times q}$, $C_1 \in \mathbb{K}^{p\times r}, C_2 \in \mathbb{K}^{q\times r}, D_1 \in \mathbb{K}^{p\times s}, D_2 \in \mathbb{K}^{q\times s}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1C_1 + A_2C_2 & A_1D_1 + A_2D_2 \\ B_1C_1 + B_2C_2 & B_1D_1 + B_2D_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Entwickeln Sie für Rechnungen mit vielen Indizes eine geschickte Notation. Vorschlag: Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sei für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, (A)_{ij} \in \mathbb{K}$ der $(i, j)-$te Koeffizient und für Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, sei $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Koeffizienten $(A)_{ij} = a_{ij}$ für $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.
Wir ermutigen Sie auch dazu, ihre eigene Notation zu entwerfen. Die Bedingung dafür ist, dass diese klar definiert wird, bevor sie benutzt wird!

(ii) Sei $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{m\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Zeigen Sie:
A invertierbar $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ invertierbar.

(iii) Sei A invertierbar. Geben Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ in Blockschreibweise an und überprüfen Sie ihr Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe 2

(i) Bestimmen Sie die Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{die Gleichung} \qquad TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{erfüllt ist.}$$

(ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, m, n \in \mathbb{N}$ und

$$E \in \mathcal{E}^1_m = \{M^{m\times m}_{k,\lambda}, 1 \leq k \leq m, \lambda \in \mathbb{K}^\times\} \cup \{A_{k,l,\lambda} | 1 \leq k \neq l \leq m, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

mit

$$M_{k,\lambda} = E_m + (\lambda - 1)B^{(m\times m)}_{kk} \text{ für } k \in \{1, ..., m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}^\times$$

und

$$A_{k,l,\lambda} = E_m + \lambda B_{lk}^{(m\times m)} \text{ für } k,l \in \{1,...,m\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{K}$$

und

$$(B_{kl}^{(m\times m)})_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl} \text{ für } 1 \leq i,j \leq m.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathcal{L}_{(A|b)} := \{v \in \mathbb{K}^n | Av = b\} = \mathcal{L}_{(EA|Eb)} = \{v \in \mathbb{K}^n | (EA)v = Eb\}.$$

Ordnen Sie dieses Ergebnis in die in der Vorlesung gegebene Zusammenfassung über lineare Gleichungssysteme ein und stellen Sie systematische Vorgehensweisen auf, wie Sie nun jedes lGS $(A|b)$ auf Lösungen untersuchen können.

Aufgabe 3

(i) Sei $M \neq \emptyset$ und $F := \{f : M \to M | f \text{ ist bijektiv}\}$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von M nach M. Zeigen Sie, dass $(F, \circ)$ eine Gruppe bezüglich folgender Verknüpfung $\circ$ ist.

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad \forall f, g \in F, x \in M$$

Untersuchen Sie ferner, ob es sich hierbei um eine abelsche Gruppe handelt.

Hinweis: Sie dürfen die Theoreme aus der Analysis über Verkettung von stetigen Funktionen benutzen.

(ii) Sei $X = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und sei $*$ ist die Multiplikation von Matrizen auf X, also

$$* : X \times X \to X.$$

Sei weiter $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Untersuchen Sie, ob die Teilmenge $U \subseteq X$ unter der angegebenen Verküpfung $*$ abgeschlossen ist, und ob U mit der Verknüpfung * eine Gruppe ist.

Aufgabe 4

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

(i) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(ii) Für alle $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ jeweils eindeutig bestimmte Lösungen $x, y \in G$.

(iii) Sei $a \in G$. Dann sind die Abbildungen

$$l_a : G \to G, \; l_a(x) = a \circ x$$

und

$$r_a : G \to G, \; r_a(x) = x \circ a$$

jeweils bijektiv.