MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
25.06.2018

Übungsblatt 12
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Folgende Aufgaben werden in der Zentralübung am Dienstag, den 26.06.2018 besprochen. Diese Aufgaben sind als Musterbeispiele zu verstehen. Eine Korrektur von Lösungsversuchen der Studierenden zu diesen Aufgaben erfolgt nicht.

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K^\times$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$.

(i) Zeigen Sie, $\det(A_{i,j,\lambda} A) = \det(A)$, wobei $A_{i,j,\lambda} \in K^{n \times n}$, die Elementarmatrix bezeichne, welche bei Multiplikation von links das λ-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile der Matrix A addiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $\det(M_{k,\lambda} A) = \lambda \det(A)$, wobei $M_{k,\lambda} \in K^{n \times n}$, die Elementarmatrix bezeichne, welche bei Multiplikation von links die k-te Zeile von A durch ihr λ-faches ersetzt.

(iii) Sei nun A eine obere Dreiecksmatrix, d.h. A hat die schematische Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, ..., x_n \in K$.
Zeige durch Induktion nach n, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $M \in K^{n \times n}$ eine Blockmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} \text{ mit } B_1 \in K^{k \times k}, B_2 \in K^{k \times l}, B_3 \in K^{l \times l},\ k, l \in \mathbb{N} \text{ mit } k + l = n,$$

dann folgt $\det(A) = \det(B_1) \det(B_3)$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für jedes $\sigma \in S_4$ sei $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)}$ der zugehörige Summand in der Leibniz-Formel für die Determinante der Matrix A. Zeigen Sie, dass es höchstens vier Elemente $\sigma \in S_4$ mit $s_\sigma \neq 0$ gibt, und geben Sie eines davon als Verkettung von Transpositionen an.