

## Tutoriumsblatt 9 für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT  
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 11.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

### Aufgabe 1 (Gewichtung 30%)

Seien  $K$  ein Körper,  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\phi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.

- (i) Zeigen Sie: Ist  $\phi$  bijektiv und  $B$  eine Basis von  $V$ , dann ist  $\phi(B)$  eine Basis von  $W$ .
- (ii) Weisen Sie anhand konkreter Gegenbeispiele nach, dass die Aussage (i) im Allgemeinen falsch ist, wenn man das Wort "bijektiv" durch "injektiv" oder "surjektiv" ersetzt.
- (iii) Zeigen Sie ebenso anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass (i) falsch wird, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass  $\phi$  eine lineare Abbildung ist.

### Aufgabe 2 (Gewichtung 35%)

Überprüfen Sie, ob die Teilmengen  $S$  der folgenden  $K$ -Vektorräume  $V$  linear unabhängig sind. Falls nicht, bestimmen Sie eine Familie  $(\lambda_v)_{v \in S}$  von Koeffizienten  $\lambda_v \in K$  mit  $\sum_{v \in S} \lambda_v v = 0_V$ , wobei  $\lambda_v \neq 0$  für mindestens ein  $v \in S$  gilt.

- (i)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $S = \{(1, 1), (2i, 2i)\}$
- (ii)  $K = \mathbb{C}$ ,  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S = \{(2 + i, 3 - i, 4 - 2i)\}$
- (iii)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(1, 2, 5), (1, 3, 7), (4, 4, 4)\}$
- (iv)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(5, 7, 3), (1, -1, 5), (11, 19, 0)\}$

### Aufgabe 3 (Gewichtung 35%)

Gegeben seien die folgenden  $K$ -Vektorräume  $V_k$  mit jeweils einer Teilmengen  $S_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

- (I)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V_1 = \mathbb{R}^3$ ,  $S_1 = \{(1, 2, 5), (1, 3, 3), (1, 0, 0), (1, -4, -1)\}$
- (II)  $K = \mathbb{C}$ ,  $V_2 = \mathbb{C}^3$ ,  $S_2 = \{(i, -i, 0), (1, 1, 0)\}$
- (III)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V_3 = \mathbb{R}^3$ ,  $S_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$

Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben:

- (i) Begründen Sie ohne Rechnung, dass  $S_1$  linear abhängig ist und bestätigen Sie ihre Vermutung, indem Sie einen Vektor  $v_1 \in S_1$  durch eine Linearkombination aus  $S_1 \setminus \{v_1\}$  darstellen.
- (ii) Begründen Sie ohne Rechnung, dass  $S_2$  keine Basis von  $V_2$  darstellt, aber durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus  $V_2$  zu einer Basis wird. (Sie dürfen dabei als gegeben voraussetzen, dass  $S_2$  linear unabhängig ist.) Finden Sie anschließend explizit eine Menge von Vektoren  $S \subseteq V_2$ , so dass  $S_2 \cup S$  eine Basis von  $V_2$  bildet.
- (iii) Zeigen Sie, dass  $S_3$  eine Basis von  $V_3 = \mathbb{R}^3$  darstellt. Weisen Sie anschließend nach, dass ein geeigneter Vektor aus  $S_3$  durch  $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$  ersetzt werden kann und die neu erhaltene Menge wieder eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  darstellt.