MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
28.05.2018

Tutoriumsblatt 8
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 04.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 20%)

Seien $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei mindestens einer der Koeffizienten ungleich 0 sei, dann bezeichnen wir die Menge

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

als Hyperebene des 3-dimensionalen euklidschen Raums.

(i) Zeigen Sie, dass H einen affinen Untervektorraum $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$, $v \in \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ darstellt und bestimmen Sie explizit eine Menge von Vektoren $V \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $U = \text{span}(V)$.

(ii) Skizzieren Sie U und H für den Spezialfall $a_1 = a_2 = a_3 = b = 1$ in einem Koordinatensystem.

Aufgabe 2 (Gewichtung 25%)

Gegeben sei die Menge $S = \{v_1, ..., v_6\}$ bestehend aus den Vektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,1,2) \quad , \quad v_2 = (1,1,1,1) \quad , \quad v_3 = (0,1,1,0) \quad , \\ v_4 &= (0,1,0,1) \quad , \quad v_5 = (1,0,0,1) \quad , \quad v_6 = (1,2,2,1) \end{aligned}$$

(i) Stellen Sie den Vektor v_5 als Linearkombination von $S \setminus \{v_5\}$ und den Vektor v_6 als Linearkombination von $S \setminus \{v_6\}$ dar.

(ii) Weisen Sie nach, dass $\text{span}(\{v_2, v_5, v_6\}) = \text{span}(\{v_3, v_5, v_6\})$ gilt.

(iii) Finden Sie eine linear unabhängige Teilmenge $B \subseteq S$ mit $\text{span}(B) = \text{span}(S)$ und weisen Sie diese beiden Eigenschaften von B nach.

Aufgabe 3 (Gewichtung 25%)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine injektive, lineare Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Ist $S \subseteq V$ eine linear abhängige Teilmenge von V, dann ist auch $\phi(S)$ linear abhängig.

(ii) Weisen Sie an Hand eines konkreten Beispiels nach, dass $\phi(S)$ auch dann linear abhängig sein kann, wenn S linear unabhängig ist.

Aufgabe 4 (Gewichtung 30%)

Sei K ein Körper, $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen und $\{b_1, ..., b_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Zeigen Sie:

(i) $\{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\}$ ist Erzeugendensystem von $W \Rightarrow \phi$ ist surjektiv

(ii) ϕ ist injektiv $\Rightarrow \{\phi(b_1), ..., \phi(b_n)\} \subseteq W$ ist linear unabhängig

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A := (a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}) \in K^{m \times n}$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei $a_{\cdot j}$ den j-ten Spaltenvektor von A bezeichnet. Folgern Sie aus (i) und (ii):

(iii) $\{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\}$ Erzeugendensystem von $K^m \Rightarrow \big(\forall b \in K^m \exists x \in K^n : Ax = b\big)$

(iv) $\big(\forall x \in K^n : (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)\big) \Rightarrow \{a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}\} \subseteq K^m$ ist linear unabhängig.