MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
07.05.2018

Tutoriumsblatt 5
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 14.05.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Achten Sie beim Lösen der Aufgaben auf Vollständigkeit. Das bedeutet auch, dass Sie jeden Schritt begründen, indem Sie notieren, welche Eigenschaft (z.B. Assoziativität, Kommutativität, neutrales Element, inverses Element) Sie benutzt haben.

Aufgabe 0 (Gewichtung: 10 %)
Geben Sie für folgende Begriffe jeweils eine vollständige Definition sowie ein Beispiel an.

- *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge A (im Zuge dessen *assoziative Verknüpfung, kommutative Verknüpfung*)
- *Monoid* $(M, \circ)$ für Menge M und Verknüpfung $\circ$ (im Zuge dessen: *neutrales Element*)
- *Gruppe* $(G, \circ)$ für Menge G und Verknüpfung $\circ$ (im Zuge dessen: *inverses Element*) und *kommutative („abelsche“) Gruppe*
- *Ring* $(R, +, *)$ für Menge R und Verknüpfungen $+, *$
- *Körper* $(K, +, *)$ für Menge K und Verknüpfungen $+, *$
- *Vektorraum* $(V, +, *)$ für Menge V und Verknüpfungen $+, *$

Aufgabe 1 (Staatsexamen H15T2A1) (Gewichtung: 20 %):
Bestimmen Sie alle Matrizen in $GL_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kommutieren.

Hinweis: Zwei Matrizen *kommutieren*, wenn $AX = XA$ gilt.

Aufgabe 2 (Gewichtung: 25%)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n, r \in \mathbb{N}$. Für $l \in \mathbb{N}$ und $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,l} \in \mathbb{K}^{l \times l}$ sei

$$spur(M) := \sum_{i=1}^{l} m_{ii} \text{ („Spur der Matrix } M\text{“).}$$

Zeigen Sie:

(i) $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times n} \Rightarrow spur(AB) = spur(BA)$

(ii) $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times r}, C \in \mathbb{K}^{r\times m} \Rightarrow spur(ABC) = spur(BCA) = spur(CAB)$

(iii) Gegeben seien zwei Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$. Eine Funktion $\phi : G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2).$$

Zeigen Sie, dass $spur : (\mathbb{K}^{n\times n}, +) \to (\mathbb{K}, +); A \mapsto spur(A)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3 (Gewichtung: 20 %)
Sei M ein Monoid mit Neutralelement e_M. Zeigen Sie:

(i) Gibt es für jedes $a \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $b \in M$ mit $aba = a$, dann ist M eine Gruppe.

(ii) Gilt $a^2 = e_M$ für jedes $a \in M$, dann ist M eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 4 (Gewichtung: 25 %)
Sei $M \neq \emptyset$ und $F := \{f : M \to M | f \text{ stetig } \}$ und $\circ : F \times F \to F, (f, g) \mapsto f \circ g$ die übliche Verkettung (Komposition) von Funktionen.
Zeigen Sie:

(i) Die Verknüpfung $\circ$ ist wohldefiniert und $(F, \circ)$ ist ein nicht-kommutativer Monoid, aber keine Gruppe.

(ii) Sei $f \in F$, dann gilt

   (a) f besitzt eine Rechtsinverse $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.
   (Dabei heißt $g : M \to M$ *Rechtsinverse* von f, wenn $f \circ g = id_M$)

   (b) f besitzt eine Linksinverse $\Leftrightarrow$ f ist injektiv
   (Dabei heißt $g : M \to M$ *Linksinverse* von f, wenn $g \circ f = id_M$)

(iii) Sei $G := \{f \in F | f \text{ bijektiv } \}$. Zeigen Sie, dass G unter $\circ$ abgeschlossen ist und $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

(iv) $\forall f, g, h \in G$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f \circ x &= y \circ g \\ g \circ y &= h \end{aligned}$$

genau eine Lösung (x, y) für $x, y \in G$.

Hinweis: Sie dürfen die Theoreme aus der Analysis über Verkettung von Funktionen benutzen.