MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
25.06.2018

Tutoriumsblatt 12
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 02.07.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung $\frac{1}{6}$)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{SL}(n, K) := \{A \in K^{n\times n} : \det(A) = 1_K\}$. Zeigen Sie, dass diese Menge mit der Verknüpfung der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

Aufgabe 2 (Gewichtung $\frac{1}{3}$)

(i) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix durch Überführung in obere Dreiecksform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

(ii) Berechnen Sie $\det(B)$ mit Hilfe der Leibniz-Formel, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Hinweis: Die Resultate aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 12 können dabei hilfreich sein.

Aufgabe 3 (Gewichtung $\frac{1}{6}$)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Seien $A, B \in K^{n\times n}$, dann gilt $\det(AB) = \det(BA)$

(ii) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Die Abbildung ϕ ist genau dann bijektiv, wenn es geordnete Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V mit $\det \mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi) = 1$ gibt.

Aufgabe 4 (Gewichtung $\frac{1}{3}$)

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 19 & 4 & 1 & 2 \\ 13 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$