MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2018
18.06.2018

Tutoriumsblatt 11
für Lineare Algebra, Lehramt Gymnasium

PROF. DR. DIRK-ANDRÉ DECKERT
Anne Froemel, Phillip Grass, Aaron Schaal

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Montag, den 25.06.2018, um 12 Uhr entweder über den Rückgabekasten oder über UniWorx ab. Spätere Abgaben können nicht berücksichtigt werden. Gerne können Sie in Gruppen abgeben (max. 3 Studierende).

Aufgabe 1 (Gewichtung 30%)

(i) Wir betrachten $V = \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = ((1+i,1),(1-i,1),(0,1),(0,1+i))$. Berechnen Sie $\Phi_{\mathcal{B}}(v)$ für den Vektor $v = (2, 3+i)$, wobei $\Phi_{\mathcal{B}}$ die aus der Vorlesung bekannte Koordinatenabbildung bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ bezeichnet.

(ii) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 mit der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1+x, 1-x, x^2+5)$. Bestimmen Sie ein Element $f \in V$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(f) = (3,-1,5)$.

Aufgabe 2 (Gewichtung 35%)

Für $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definieren wir die Abbildung $\phi_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto Bv$. Sei zudem die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Ziel der Aufgabe ist es für beliebig vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ explizit Vektoren $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen, so dass $\phi_{A^n}(\hat{e}_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$. Gemäß Vorlesung ist die lineare Abbildung ϕ_{A^n} dann bereits eindeutig bestimmt.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi_A)$ und die Transformationsmatrizen $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}$, $T^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B} := ((-1,2,1),(-1,0,1),(1,-5,2))$ und $\mathcal{E}_3$ die kanonische Basis bestehend aus den Einheitsvektoren $\mathcal{E}_3 := (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

(ii) Interpretieren Sie mittels der speziellen Form der Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi_A)$, durch welche geometrische Operation ϕ_A auf die Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ wirkt.

(iii) Machen Sie sich zunächst bewusst, dass $A = \mathcal{M}^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(\phi_A) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi_A)T^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}$. Durch Verwendung dieser Identität lässt sich die Berechnung von A^n sehr stark vereinfachen. Nutzen Sie dies, um schließlich $\phi_{A^n}(\hat{e}_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$ zu berechnen.

Aufgabe 3 (Gewichtung 35%)

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2, $\mathcal{A} = (2, 1+x, -x^2)$, W' der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 und W der Untervektorraum von W' gegeben durch $W = \operatorname{span}\{x, x+x^2, x^3+x^2\}$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\mathcal{A}$ eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B} = (x, x+x^2, x^3+x^2)$ eine geordnete Basis von W ist.

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)$ der linearen Abbildung $\phi : V \to W,\ p \mapsto \int_0^x p(t)\, dt$.

(ii) Berechnen Sie die inverse Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\phi)^{-1}$ und verwenden sie diese für den Nachweis, dass ϕ^{-1} durch $\phi^{-1}(p) = p'$ für alle $p \in W$ gegeben ist.

(iii) Entscheiden Sie, ob es geordnete Basen $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ von V und W gibt, so dass $\mathcal{M}^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(\phi) = A$ gibt, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad \text{bezeichnet.}$$