MATHEMATICSCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Probeklausur zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jedes komplexe Polynom n-ten Grades n Nullstellen (mit Multiplizität gezählt) hat.

Hinweis: Dazu können Sie den Satz von Rouché oder *den Satz von Liouville verwenden.*

Aufgabe 2. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ in eine Laurentreihe, die auf dem Gebiet $\mathcal{B}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\}$ konvergiert. Bestimmen Sie danach das Residuum von $f(z)$ an der Stelle $z = 0$. Warum lässt sich dieses nicht an der berechneten Laurentreihe direkt ablesen?

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe komplexer Integration das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x.$$

Achten Sie dabei auf eine klare Begründung, warum Ihre Rechnung das richtige Resultat liefert.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' = 3y' - 2y$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung für das Anfangswertproblem $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

Aufgabe 5. Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$y' = y \sin x + \sin x$$

auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Lösen sie sodann das entsprechende Anfangswertproblem für $y(0) = 1$.