MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Probeklausur zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Musterlösung

Prof. Dr. P. Pickl

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jedes komplexe Polynom n-ten Grades n Nullstellen (mit Multiplizität gezählt) hat.

Hinweis: Dazu können Sie den Satz von Rouché oder *den Satz von Liouville verwenden.*

Lösung

Sei $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, mit $a_n \neq 0$.

Erinnerung: Aus der Vorlesung wissen Sie:

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{q_1(z)}{q_2(z)} \right| = 0,$$

für zwei Polynome q_1, q_2 mit $\mathrm{grad}(q_1) < \mathrm{grad}(q_2)$.

Mit dem Satz von Rouché: Für $f(z) = a_0 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}$ und $g(z) = a_n z^n$ ist $p = f + g$ und es gilt $\mathrm{grad}(f) = n - 1 < n = \mathrm{grad}(g)$. Da $\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| = 0$ ist, existiert es $R > 0$, sodass $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < 1$, für $|z| \geqslant R$. Insbesondere gilt

$$|f(z)| < |g(z)|$$

für $z \in \partial B_R(0)$. Nach dem Satz von Rouché haben g und $f + g = p$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in $B_R(0)$. Da g n Nullstellen (mit Multiplizität gezählt) bei $z = 0$ hat, hat p auch n Nullstellen in $B_R(0)$.

Mit dem Satz von Liouville: Wir zeigen zuerst, dass wenn $n \geqslant 1$ ist, p mindestens eine Nullstelle hat.

Angenommen p hat keine Nullstelle. Es ist also $p(z) \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ und somit ist $\frac{1}{p}$ holomorph. Da

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{1}{p(z)} \right| = 0$$

ist, ist die Funktion $\frac{1}{p}$ beschränkt und nach dem Satz von Liouville ist sie auch konstant. Das bedeutet aber, dass p auch konstant ist, was in Widerspruch zu $n \geqslant 1$ steht.

Der Rest des Beweises folgt durch Induktion:

Zu zeigen ist die Aussage $A(n)$: „jedes Polynom n-tes Grades hat n Nullstellen“. $A(1)$ wurde oben gezeigt. Angenommen, es gilt $A(n-1)$, zeigen wir $A(n)$: Das Polynom p hat mindestens eine Nullstelle z_0 (siehe oben). Dann ist $p(z) = (z - z_0)q(z)$, mit $\mathrm{grad}(q) = n - 1$. Nach der Induktion Annahme hat q $n - 1$ Nullstellen, die mit z_0 zusammen die n Nullstellen von p bilden.

Aufgabe 2
Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ in eine Laurentreihe, die auf dem Gebiet $\mathcal{B}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\}$ konvergiert. Bestimmen Sie danach das Residuum von $f(z)$ an der Stelle $z = 0$. Warum lässt sich dieses nicht an der berechneten Laurentreihe direkt ablesen?

Lösung
Wir schreiben

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}$$

Für $|z| > 1$ können wir $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}$ als geometrische Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k}$$

Somit erhalten wir die im Gebiet $\mathcal{B}_1(0)$ konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} z^{-(k+1)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{-k}$$

Das Residuum von $f(z)$ an der Stelle 0 kann von der obigen Laurentreihe nicht abgelesen werden. Um das Residuum ablesen zu können, benötigt man die Laurentreihe von $f(z)$, die in einem Gebiet, die die Null enthält, konvergiert.
Eine Möglichkeit, das Residuum zu bestimmen, ist folgende Formel (vgl. Blatt 8):

$$\operatorname{res}_{z_0}(h) = \frac{((z-z_0)^n h(z))^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

Diese Formel gilt, falls $h(z)$ einen Pol n-ter Ordnung im Punkt z_0 besitzt. In unserem Fall besitzt $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ in $z_0 = 0$ einen Pol 1.Ordnung, da $zf(z)$ in $z_0 = 0$ holomorph fortsetzbar ist. Daher gilt in unserem Fall mit $n = 1$

$$\operatorname{res}_{z_0=0}(f) = (zf(z))|_{z=0} = 1$$

Eine alternative Möglichkeit das Residuum zu berechnen ist folgende Formel:

$$\operatorname{res}_0(f) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{U}_\epsilon(0)} dz f(z)$$

wobei $\mathcal{U}_\epsilon(0) := \{z \in \mathbb{C} | |z| < \epsilon\}$ für ein $\epsilon > 0$, so dass $f(z)$ in $\bar{\mathcal{U}}_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ holomorph ist, wobei $\bar{\mathcal{U}}_\epsilon(0) := \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq \epsilon\}$ der Abschluss von $\mathcal{U}_\epsilon(0)$ ist. In unserem Fall erhalten wir für $0 < \epsilon < 1$

$$\operatorname{res}_{z_0}(h) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{U}_\epsilon(0)} dz f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{U}_\epsilon(0)} dz\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) = 1$$

da $\int_{\mathcal{U}_\epsilon(0)} dz\frac{1}{z} = 2\pi\mathrm{i}$ und $\int_{\mathcal{U}_\epsilon(0)} dz\frac{1}{z+1} = 0$ gilt. Letztere Aussage folgt aus der Tatsache, dass für $0 < \epsilon < 1$ die Funktion $\frac{1}{z+1}$ in $\bar{\mathcal{U}}_\epsilon(0)$ holomorph ist.

Alternativ kann auch die Laurentreihe von $f(z)$ um die Null bestimmt werden. Das Residuum ist dann der Koeffizient von $1/z$.

Aufgabe 3
Berechnen Sie mit Hilfe komplexer Integration das reelle Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x.$$
Achten Sie dabei auf eine klare Begründung, warum Ihre Rechnung das richtige Resultat liefert.

Lösung
Aufgrund der Symetrie der Funktion gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x$. Außerdem ist $\frac{\cos x}{x^2+1} = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+1}\right)$ für $x \in \mathbb{R}$ und somit $\int_{-r}^{r} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+1} \mathrm{d}x\right)$.
Daraus folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1} \mathrm{d}z\right).$$
Wir werden die rechte Seite mit Hilfe des Resiudensatzes berechnen. Dafür betrachten wir die komplexe Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}$ und die Kurven
$$\begin{array}{lllllll} \gamma_r^1(t) & := & t & \text{für } t \in [-r,r], & \gamma_r^3(t) & := & t+\mathrm{i}r \quad \text{für } t \in [r,-r], \\ \gamma_r^2(t) & := & r+\mathrm{i}t & \text{für } t \in [0,r], & \gamma_r^4(t) & := & -r+\mathrm{i}t \quad \text{für } t \in [r,0]. \end{array}$$
$\Gamma_r := \gamma_r^1 + \gamma_r^2 + \gamma_r^3 + \gamma_r^4$ ist die geschlossene Kurve, die das Rechteck mit Ecken $-r, r, r+\mathrm{i}r, -r+\mathrm{i}r$ in die positive Richtung einmal umläuft. Die Kurve γ_r^1 parametrisiert die Strecke $[-r,r]$, die uns interessiert.
Die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{\pm\mathrm{i}\}$ und hat an der Stellen $z=\mathrm{i}$ und $z=-\mathrm{i}$ jeweils einen Pol erster Ordung. Für $r>1$ liegt nur die Polstelle $z=\mathrm{i}$ im Inneren von Γ_r. Nach dem Residuensatz gilt für $r>1$
$$\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}(f) = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2}}{2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{e}^{-1}.$$
Jetzt zeigen wir, dass die Integrale auf γ_r^2,γ_r^3 und γ_r^4 im Limes $r\to\infty$ keinen Beitrag zum Integral liefern, d.h., dass $\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r^i} f(z)\mathrm{d}z = 0$ für $i=2,3,4$ ist.
$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_r^2} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^r f(\gamma_r^2(t))\gamma_r^{2\prime}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^r |f(\gamma_r^2(t))\gamma_r^{2\prime}(t)|\mathrm{d}t = \int_0^r \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|(r+\mathrm{i}t)^2+1|}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,r]} \frac{1}{|(r+\mathrm{i}t)^2+1|}\int_0^r \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{r^2-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{r^2-1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$
Hier haben wir benutzt, dass
$$|(r+\mathrm{i}t)^2+1| \geqslant |(r+\mathrm{i}t)^2| - 1 = |r+\mathrm{i}t|^2 - 1 = r^2+t^2-1 \geqslant r^2-1$$
für $t\in[0,r]$ ist, also $\frac{1}{|(r+\mathrm{i}t)^2+1|} \leqslant \frac{1}{r^2-1}$, für $t\in[0,r]$.
Analog zeigt man $\left|\int_{\gamma_r^4} f(z)\mathrm{d}z\right| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$. Auf γ_r^3 gilt
$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_r^3} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|-\int_{-r}^r f(\gamma_r^3(t))\gamma_r^{3\prime}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-r}^r \frac{\mathrm{e}^{-r}}{|(t+\mathrm{i}r)^2+1|}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-r}\sup_{t\in[-r,r]} \frac{1}{|(t+\mathrm{i}r)^2+1|}\int_{-r}^r 1\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-r}\frac{1}{r^2-1}2r \xrightarrow[r\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$
Somit gilt
$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r^1} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + 0 + 0 + 0 = \pi\mathrm{e}^{-1},$$
und
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r^1} f(z)\mathrm{d}z\right) = \pi\mathrm{e}^{-1}.$$

Aufgabe 4
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' = 3y' - 2y$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung für das Anfangswertproblem $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$

Lösung

(a) Mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = Ae^{\lambda x}$ wird das Fundamentalsystem bestimmt. Dazu setzen wir $Ae^{\lambda x}$ in die Differentialgelichung ein und erhalten

$$(\lambda^3 - 3\lambda + 2)Ae^{\lambda x} = 0$$

Wir bestimmen die Nullstellen des Polynoms $\lambda^3 - 3\lambda + 2$:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$$

Die Nullstellen lauten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1\ ; \lambda_3 = -2$. Da die Nullstelle 1 eine doppelte Vielfachheit besitzt, erhalten wir als Fundamentalsystem die 3 linear unabhängigen Lösungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) =& e^x \\ \varphi_2(x) =& xe^x \\ \varphi_3(x) =& e^{-2x} \end{aligned}$$

(b) Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung lautet

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ aus der Anfangsbedingung zu bestimmen sind.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned} y(0) =& c_1 + c_3 = 1 \\ y'(0) =& c_1 + c_2 - 2c_3 = 1 \\ y''(0) =& c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann z.B. mit Hilfe des Gauß-Verfahrens bestimmt werden. Wir geben hier nur die Lösung an (in der Klausur muss der Rechenweg nachvollziehbar sein):

$$c_1 = 10/9\ , c_2 = -1/3\ , c_3 = -1/9$$

Das bedeutet, dass die Lösung der obigen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangsbedingungen wie folgt lautet:

$$y(x) = \frac{10}{9}e^x - \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^{-2x}$$

Aufgabe 5
Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$y' = y \sin x + \sin x$$

auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Lösen sie sodann das entsprechende Anfangswertproblem für $y(0) = 1$.

Lösung
Die Funktion $f(x, y) = y \sin x + \sin x$ ist stetig in $\mathbb{R}^2$ und global Lipschitz-stetig in der zweiten Variable: für festes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |(y_1 - y_2) \sin x| \leqslant |y_1 - y_2|$, für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert eine globale Lösung und sie ist eindeutig.

Jetzt lösen wir das Problem für $y(0) = 1$ mit der Methode der Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y'(x) = y(x) \sin x$$

ist (Trennung der Variablen) $y(x) = C\mathrm{e}^{-\cos x}$. Um Lösungen des inhomogenen Problems zu finden, lassen wir die Konstante variieren. D.h., wir suchen nach einer Lösung mit dem Ansatz

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\cos x}.$$

Dann ist

$$y'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} + C(x) \sin x \mathrm{e}^{-\cos x} = C'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} + \sin x y(x).$$

Damit y das Problem löst, muss

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\cos x} = \sin x$$

gelten. Also

$$C'(x) = \sin x \mathrm{e}^{\cos x}.$$

Wir integrieren auf beiden Seiten und finden

$$C(x) = \int_0^x \sin u \mathrm{e}^{\cos u} \mathrm{d}u + D_1 = [-\mathrm{e}^{\cos u}]_0^x + D_1 = -\mathrm{e}^{\cos x} + D_2,$$

für Konstanten D_1, D_2. Somit ist

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\cos x} = -1 + D_2\mathrm{e}^{-\cos x}.$$

Einsetzen von y in die Gleichung zeigt, dass tatsächlich $y' = y \sin x + \sin x$. Wir müssen nur die Konstante D_2 zum Anfangswert anpassen.

$$y(0) = -1 + D_2\mathrm{e}^{-1} \stackrel{!}{=} 1,$$

also $D_2 = 2\mathrm{e}$. Die gesuchte Lösung ist dann $y(x) = -1 + 2\mathrm{e}^{1-\cos x}$.