MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

26.08.2014

Nachklausur zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Musterlösung

Prof. Dr. P. Pickl

Aufgabe 1 Es seien G eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: ist $\mathrm{Re}(f)$ oder $\mathrm{Im}(f)$ konstant, so ist f auch konstant.

Lösung

Es seien $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ $-u$ und v verstehen wir als Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, das heißt, $u(x, y) := \mathrm{Re}(f(x + \mathrm{i}y))$, $v(x, y) := \mathrm{Im}(f(x + \mathrm{i}y))$–. Da f holomorph ist, erfüllen u und v die Cauchy-Riemannsche Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_x u & = & \partial_y v \\ \partial_y u & = & -\partial_x v. \end{cases}$$

O.B.d.A. nehmen wir an, dass $u = \mathrm{Re}(f)$ konstant ist (wäre stattdessen $\mathrm{Im}(f)$ konstant, multiplizieren wir unsere Funktion mit i und wenden das Resultat an). Dann gilt $0 = \partial_x u = \partial_y u$, und nach der Cauchy-Riemannsche Gleichungen das gleiche gilt auch für v: $0 = \partial_x u = \partial_y v$ und $0 = \partial_y u = -\partial_x v$. Das heißt, $\nabla v = 0$, und somit ist v auch eine konstante Funktion. $f = u + \mathrm{i}v$ ist dann auch konstant.

Bepunktungsvorschlag: 2P für die (begründeten) Cauchy-Riemannsche Gleichungen, 3P für den Beweis, dass wenn u (oder v) konstant ist, ihr Gradient Null ist und somit auch der Gradient von v (oder u). 4 weitere Punkte für die Schlussfolgerung, dass dann v (oder u) konstant ist und somit auch f. Den letzten Punkt bekommt man für die Bemerkung, dass der Beweis für „Re(f) konstant“ auch für „Im(f) konstant“ gilt (nicht notwendigerweise wie bei der Lösung, es reicht auch zu sagen, dass der Beweis analog ist). Den 2. Fall direkt zu beweisen vergibt natürlich auch den Punkt.

Aufgabe 2 Gegeben sei die Funktion $f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z+2)}$. Entwickeln Sie die Funktion in Laurentreihen um $z_0 = 1$, die jeweils auf den Kreisringen $\mathcal{K}_{0,3}(1)$ und $\mathcal{K}_{3,\infty}(1)$ konvergieren.

Erinnerung: Für $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ *und* $c \in \mathbb{C}$ *ist* $\mathcal{K}_{r,R}(c) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-c| < R\}$.

Lösung

Für jeden Kreisring suchen wir eine konvergente Reihe in der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$.

Als erstes schreiben wir die Funktion als Summe von zwei Funktionen der Form $\frac{a}{z-b}$, $a, b \in \mathbb{C}$, die man mit der geometrischen Reihe gut vergleichen kann:

$$\frac{3z}{(z-1)(z+2)} = \frac{3(z-1)}{(z-1)(z+2)} + \frac{3}{(z-1)(z+2)} = \frac{3}{z+2} + \frac{-1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

Der Term $\frac{1}{z-1}$ hat bereits die gesuchte Form und ist für $z \neq 1$ (also in beiden Kreisringen) definiert.

Den zweiten Term schreiben wir mit Hilfe der geometrischen Reihe um. (Erinnerung: $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$ für $|w| < 1$). Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, damit die ensprechende Reihe konvergiert:

Fall $||z-1| < 3|$

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}(1-z)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n (z-1)^n,$$

da $\left|\frac{1}{3}(1-z)\right| < 1$ ist.

Fall $||z-1| > 3|$

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{(z-1)-(-3)} = \frac{2}{z-1} \frac{1}{1 - \frac{-3}{z-1}} = \frac{2}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{z-1}\right)^n,$$

da $\left|\frac{-3}{z-1}\right| < 1$ ist.

Damit diese letzte Reihe die gewünschte Form hat, müssen wir noch den Index anpassen:

$$\frac{2}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{z-1}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2(-3)^{-n-1}(z-1)^n.$$

Zum Schluss addieren wir beide Terme:

Für $0 < |z-1| < 3$, also $z \in \mathcal{K}_{0,3}(1)$, gilt

$$f(z) = (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n,$$

und für $3 < |z-1|$, also $z \in \mathcal{K}_{3,\infty}(1)$, gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} 2(-3)^{-n-1}(z-1)^n + 2(z-1)^{-1}.$$

Bepunktungsvorschlag: Jeden Fall $z \in \mathcal{K}_{0,3}(1)$ und $z \in \mathcal{K}_{3,\infty}(1)$ vergibt 5 Punkte. 2/5 Punkte bekommt man bei jedem Fall für die Argumentierung, dass die gefundene Reihe konvergiert (man könnte auch das Resultat aus der Tutoriumsaufgabe für $\frac{1}{a-b}$ benutzen). Jeweils 1P falls die angegebene Reihe die richtige Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n$ hat. Die restlichen Punkte für richtige Zerlegungen, Umschreibungen...

Aufgabe 3 Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial\mathcal{B}_5(0)} \frac{e^{i\alpha z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\partial\mathcal{B}_r(z_0)$ bezeichnet den Kreis von Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$ in positivem Umlauf.

Lösung

Die Aufgabe kann man mit der Cauchyschen Integralformel für die Ableitungen oder mit den Residuensatz lösen:

Cauchysche Integralformel

Sei $f(z) := e^{i\alpha z}$. f ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und $z_0 = 1$ liegt innerhalb der Kurve $\partial\mathcal{B}_5(0)$. Somit sind die Annahmen der Cauchysche Integralformel erfüllt und es gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{B}_5(0)} \frac{e^{i\alpha z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{\partial\mathcal{B}_5(0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f'(z_0) = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{i}\alpha e^{i\alpha}) = -2\pi\alpha e^{i\alpha}.$$

Residuensatz

Hier wählen wir $f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{(z-1)^2}$. Die Funktion ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ (als Komposition holomorpher Funktionen) und an der Stelle $z_0 = 1$ hat sie eine Polstelle 2. Ordnung, die innerhalb der Kurve $\partial\mathcal{B}_5(0)$ liegt. Nach dem Residuensatz gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{B}_5(0)} \frac{e^{i\alpha z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_0}(f).$$

Um das Residuum zu bestimmen benutzen wir die aus der Zentralübung bekannte Formel (Aufgabe 1, Blatt 8)

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = g'(z_0),$$

wobei g die holomorphe Vorsetzung von der Funktion $(z-z_0)^2 f(z)$ ist. In diesem Fall ist $g(z) = e^{i\alpha z}$, also $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = g'(z_0) = \mathrm{i}\alpha e^{i\alpha}$ und man kommt zum gleichen Ergebnis wie oben.

Bepunktungsvorschlag: Bei der Cauchyschen Integralformel, die Formel anzugeben vergibt 4 Punkte, die Voraussetzungen zu nennen und zu überprüfen 4 weitere Punkte, und die 2 letzte für richtige Rechnungen. Bei der Version mit dem Residuensatz, 3 Punkte für die Formel, 3 für die Voraussetzungen, 2 weitere Punkte für eine richtige Formel für das Residuum und noch 2 für die Rechnungen.

Aufgabe 4 Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$y' = e^{y+2x}$$

für $x \in \mathbb{R}$ auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Lösen Sie sodann das entsprechende Anfangswertproblem für $y(0) = 0$ auf dem maximalen Lösungsintervall. Geben Sie des Weiteren das maximale Lösungsintervall explizit an.

Lösung
Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen:

Wir werden zeigen, dass die Funktion $f(x, y) = e^{y+2x}$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Somit ist (nach Picard-Lindelöf, weil f auch stetig in x ist) das Problem lokal eindeutig lösbar.

Für feste $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ suchen wir $C > 0$ und eine y_0-Umgebung U so, dass

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant C|y_0 - y|$$

für $y \in U$ gilt. Es seien dann $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Die Funktion e^y ist unendlich-oft differenzierbar, insbesondere stetig differenzierbar. Die Ableitung e^y ist auf jeder kompakten y_0-Umgebung $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ beschränkt durch eine Konstante $\tilde{C} > 0$ (die von y_0 und δ abhängt). Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|f(x_0, y_0) - f(x_0, y)| = e^{x_0}|e^{y_0} - e^y| \leqslant e^{x_0}\tilde{C}|y_0 - y| = C|y_0 - y|,$$

für $y \in U := [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, wobei $C = e^{x_0}\tilde{C}$. Diese Konstante hängt von x_0, y_0 und δ ab, wir haben nur eine lokale Lipschitz-Bedingung bewiesen. –Die Funktion ist nicht global Lipschitz: Sei zum Beispiel $y_0 = 0$. Für $y > 0$ ist $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \geqslant 1 + y + \frac{y^2}{2}$ (drei erste Terme der Reihe), also

$$\lim_{y\to\infty} \frac{|e^{y_0} - e^y|}{|y_0 - y|} = \lim_{y\to\infty} \frac{|1 - e^y|}{|y|} \geqslant \lim_{y\to\infty} \frac{y + \frac{y^2}{2}}{y} = \infty.$$

Das heißt, es existiert keine Konstante C so, dass $|e^{y_0} - e^y| \leqslant C|y_0 - y|$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt, wenn $y_0 = 0$. Das gleiche gilt für ein beliebiges $y_0 \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist somit nicht global Lipschitz in y. Dies wird für die Lösung nicht verlangt–.

Lösung des Anfangswertproblems:

$y' = e^{y+2x} = e^y e^{2x}$. Wir lösen das Problem mit Trennung der Variablen. Es gilt

$$y'e^{-y} = e^{2x} \Rightarrow \int_{y_0}^{y} e^{-v}\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} e^{2u}\mathrm{d}u \Rightarrow e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{2x} + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Für die Anfgangsbedingung $y(0) = 0$ gilt $e^0 = -\frac{1}{2}e^0 + C$, also $C = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Wir nehmen das Logaritmus auf beiden Seiten und finden

$$y(x) = -\log\left(\frac{3 - e^{2x}}{2}\right),$$

definiert für $3 - e^{2x} > 0$, d.h. $x \in \left(-\infty, \frac{\log 3}{2}\right)$.

Bepunktungsvorschlag: Existenz und Eindeutigkeit: den Satz von Picard-Lindelöf zu formulieren vergibt 1P, die Bedingungen des Satzes zu überprüfen (Steitigkeit in x muss man nicht beweisen, aber schon erwähnen) 3P (für die Lipschitz-Bedingung reicht zu sagen, dass stetig Diffbarkeit Lipschitz-stetigkeit impliziert, man muss den Beweis nicht schreiben), die richtige Schlussfolgerung zu treffen 1P. (Zu zeigen, dass die Funktion nicht global-Lipschitz ist, ist nicht verlangt, aber vergibt einen extra Punkt. Das Maximum sind jedoch 10 Punkte). Lösung des Problems: Trennung der Variablen zu benutzen und die Vorgehensweise zu kennen 2P, die richtige Lösung zu finden 2P, das maximale Lösungsintervall anzugeben 1P.

Aufgabe 5 Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

für $x \in (0, \infty)$ auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Lösen Sie sodann das entsprechende Anfangswertproblem für $y(1) = 1$ auf dem maximalen Lösungsintervall. Geben Sie des Weiteren das maximale Lösungsintervall explizit an.

Lösung

Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen:

Die Funktion $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ ist stetig in x für $x \in (0, \infty)$. Sie ist auch lokal Lipschitz-stetig in y, da für festes x ihre y-Ableitung $\frac{2y}{x^2} + \frac{1}{x}$ stetig in y ist. Dies zeigt, wie in Aufgabe 4, dass f lokal Lipschitz-stetig in y ist. Daraus folgen Existenz und lokale Eindeutigkeit der Lösungen (nach dem Satz von Picard-Lindelöf). –Die Funktion ist jedoch nicht global Lipschitz in y: Für $y_0 = 0$ gilt

$$|f(x, y_0) - f(x, y)| = \left| \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \right|.$$

Wir müssten eine Konstante $C > 0$ so finden, dass $\left| \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \right| \leqslant C|y|$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt, insbesondere $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \leqslant Cy$ für jedes $y > 0$. Das ist nicht möglich, da $\lim_{y\to\infty} \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \right) y^{-1} = \infty$ ist, also durch keine Konstante beschränkt. Dies wird für die Lösung nicht verlangt–.

Lösung des Anfangswertproblems:

Mit der Substitution $z = \frac{y}{x}$ wird die Differentialgleichung $z'x = z^2$. Diese neue Gleichung können wir mit Trennung der Variablen lösen. Es gilt

$$\int_{z_0}^{z} v^{-2} \mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} u^{-1} \mathrm{d}u \Rightarrow -z^{-1} = \log x + C \Rightarrow z(x) = z(x) = \frac{-1}{\log x - C}.$$

Wir Substituiren zurück und finden

$$y(x) = xz(x) = \frac{-x}{\log x - C}.$$

Die Anfangsbedingung ergibt $1 = \frac{-1}{0-C} \Rightarrow C = 1$. Das heißt, $y(x) = \frac{-x}{\log x - 1}$ definiert für $\log x < 1$, d.h. für $x \in (0, \mathrm{e})$.

Bepunktungsvorschlag: Existenz und Eindeutigkeit: den Satz von Picard-Lindelöf zu formulieren vergibt 1P, die Bedingungen des Satzes zu überprüfen (Steitigkeit in x muss man nicht beweisen, aber schon erwähnen) 3P (für die Lipschitz-Bedingung reicht zu sagen, dass stetig Diffbarkeit Lipschitz-stetigkeit impliziert, man muss den Beweis nicht schreiben), die richtige Schlussfolgerung zu treffen 1P. (Zu zeigen, dass die Funktion nicht global-Lipschitz ist, ist nicht verlangt, aber vergibt einen extra Punkt. Das Maximum sind jedoch 10 Punkte). Lösung des Problems: Die Substitution durchzufüren, Trennung der Variablen zu benutzen und die Vorgehensweise zu kennen 2P, die richtige Lösung zu finden 2P, das maximale Lösungsintervall anzugeben 1P.