MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2014

Klausur zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Musterlösung

Prof. Dr. P. Pickl

Aufgabe 1 Es seien G eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f = u + \mathrm{i}v$ eine holomorphe Funktion in G, wobei u der Realteil und v der Imaginärteil von f sind. Ferner sei $\tilde{v} : G \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie: die Funktion $u + \mathrm{i}\tilde{v}$ ist genau dann komplex differenzierbar wenn $v - \tilde{v}$ konstant ist.

Lösung

Beweis:
"$v - \tilde{v}$ konstant"$\rightarrow$ "die Funktion $u + \mathrm{i}\tilde{v}$ ist komplex differenzierbar":

Da $v - \tilde{v}$ konstant ist, folgt, dass $u + \mathrm{i}\tilde{v} = f(z) + c$ fuer ein $c \in \mathbb{C}$. Da $f(z)$ komplex differenzierbar ist, ist offenbar auch $f(z) + c$ komplex differenzierbar. Alternativ kann auch gesagt werden, dass $u + i\tilde{v}$ autmatisch auch die Cauchy-Riemannschen DGL's erfüllt, da ja $v - \tilde{v}$ konstant ist.

Bepunktung:
1.5 Punkte fuer $u + \mathrm{i}\tilde{v} = f(z) + c$.
0.5 Punkte fuer die Bemerkung, dass $f(z) + c$ komplex differenzierbar ist.
Oder 2 Punkte, falls geschrieben wurde, dass $u + i\tilde{v}$ die CR-DGL's erfüllt.

"die Funktion $u + \mathrm{i}\tilde{v}$ ist komplex differenzierbar": $\rightarrow$ "$v - \tilde{v}$ konstant"

Da sowohl $f(z)$ als auch $u + \mathrm{i}\tilde{v}$ komplex differenzierbar sind (laut Voraussetzung) erhalten wir folgende Differentialgleichungen (Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \\ \partial_x u &= \partial_y \tilde{v} \\ \partial_y u &= -\partial_x \tilde{v} \end{aligned}$$

(korrekter sollte man $(\partial_x u)(x, y)$ u.s.w. schreiben, aber das ist fuer die Bewertung egal). Gleichung 1- Gleichung 3 liefert:

$$0 = \partial_y v - \partial_y \tilde{v} = \partial_y (v - \tilde{v})$$

Daraus folgt, dass $v - \tilde{v}$ nicht von y abhaengt, d.h. $\exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $v(x, y) - \tilde{v}(x, y) = h(x)$.
Analog folgt, mit Hilfe von Gleichung 2-Gleichung 4:

$$0 = -\partial_x v + \partial_x \tilde{v} = -\partial_x (v - \tilde{v})$$

Daraus folgt, dass $v - \tilde{v}$ nicht von x abhaengt.
Insgesamt folgt also, dass $v - \tilde{v} = c$ fuer ein $c \in \mathbb{R}$; d.h. $v - \tilde{v}$ ist konstant.

Bepunktung:

- 4 Punkte fuer die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
- Jeweils einen Punkt fuer $0 = \partial_y (v - \tilde{v})$ und $0 = \partial_x (v - \tilde{v})$.
- Jeweils einen Punkt fuer die Bemerkung, dass $v - \tilde{v}$ nicht von x bzw. y abhaengt (kann auch nur als Bemerkung ohne Rechnung dastehen, falls $0 = \partial_y (v - \tilde{v})$ und $0 = \partial_x (v - \tilde{v})$ schon hergeleitet wurden).

Aufgabe 2 Beachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f **keine** Einschränkung auf $\mathbb{R}$ einer holomorphen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist.

Erinnerung: f ist eine Einschränkung auf $\mathbb{R}$ von $\tilde{f}$, falls $\tilde{f}(x) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung

Nach dem Identitätssatz gilt folgendes: zwei holomorphe Funktionen, die auf einer nicht-diskreten Menge übereinstimmen, sind gleich.

Also jede holomorphe Funktion $\tilde{f}$, die auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ identisch Null ist, ist nach dem Identitätssazt auf ganz $\mathbb{C}$ identisch Null. Da f für $x > 0$ nicht Null ist, kann $\tilde{f}(x) = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ nicht gelten.

Bemerkung: Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, aber an $x = 0$ werden alle ihre Ableitungen Null. Das heißt, wenn die Funktion eine Einschränkung einer holomorphen Funktion wäre, wäre sie analytisch (sie wäre in eine Taylorreihe entwickelbar), aber für f ist die Taylorentwicklung um $x = 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \equiv 0 \neq f(x)$ für $x > 0$, also f ist nicht analytisch. Das wäre eine alternative Lösung für die Aufgabe.

Bepunktungsvorschlag: Den Identitätssazt zu benennen gibt 5 Punkte. Den Rest der Punkte bekommt man für die richtige Formulierung des Satzes und eine logische Argumentierung.

Aufgabe 3 Sei $a > 0$. Berechnen Sie mit Hilfe komplexer Integration das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a} \mathrm{d}x.$$

Lösung

Aufgrund der Symmetrie der Funktion gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a} \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+a} \mathrm{d}x$.

Die Idee: Für jedes R definieren wir eine geschlossene Kurve $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ in $\mathbb{C}$ so, dass γ_1 die Strecke $[-R, R]$ parametrisiert und das Integral auf γ_2 im Limes $R \to \infty$ Null wird. Es gilt

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2 + a} \mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z = \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z$$

und im Limes $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2 + a} \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z - 0.$$

Das Integral auf Γ können wir mit dem Residuensatz berechnen.

Die Lösung: Sei $f(z) = \frac{1}{z^2+a} = \frac{1}{(z-\mathrm{i}\sqrt{a})(z+\mathrm{i}\sqrt{a})}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\sqrt{a}\}$. f ist holomorph und an der Stellen $z = \pm\mathrm{i}\sqrt{a}$ hat die Funktion jeweils einen Pol erster Ordnung. Die geschlossene Kurve sei definiert durch $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, mit $\gamma_1(t) := t$, $t \in [-R, R]$; $\gamma_2(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$. Γ läuft in die positive Richtung einmal um den oberen Halbkreis mit Zentrum 0 und Radius R.

Sei $R > a$. Nur die Polstelle $\mathrm{i}\sqrt{a}$ liegt innerhalb von Γ. Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}_f \left(\mathrm{i}\sqrt{a}\right) = 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to\mathrm{i}\sqrt{a}} f\left(z - \mathrm{i}\sqrt{a}\right) f(z) = 2\pi\mathrm{i} \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

Es gilt also

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2 + a} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{a}} - \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z$$

für R groß genug ($R > a$).

Jetzt zeigen wir, dass das Integral auf γ_2 im Limes $R \to \infty$ Null wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + a} \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^{\pi} f(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t) \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{R^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t} + a} \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_0^{\pi} \left| \frac{R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{R^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t} + a} \right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{R}{R^2 - a} \pi \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung haben wir folgendes benutzt:

$$|R^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t} + a| \geqslant |R^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}| - |a| = R^2 - a.$$

Bepunktungsvorschlag: Die ersten 5 Punkte für die Umformulierung des Problems: das Integral als Limes zu schreiben, Definition und Eigenschaften von f und die Kurven, das Integral auf $[-R, R]$ als integral auf $\Gamma - \gamma_2$ zu schreiben. 3 Punkte für die Richtige Anwendung des Residuensatzes, einschließlich die Berechnung von $\operatorname{Res}_f (\mathrm{i}\sqrt{a})$. Die lezte 2 Punkte für den Beweis, dass das Integral auf γ_2 im Limes $R \to \infty$ Null wird.

Aufgabe 4 Überprüfen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{\cos y}$$

für $y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Lösen Sie sodann das entsprechende Anfangswertproblem für $y(0) = 0$ auf dem maximalen Lösungsintervall. Geben Sie des Weiteren das maximale Lösungsintervall explizit an.

Lösung

Existenz und Eindeutigkeit: Wir werden zeigen, dass $\forall y \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{\cos y}$ in y Lipschitz-stetig ist. Daraus folgt, dass obige Differentialgleichung (gemäß Picard Lindelöf) lokal eindeutig lösbar ist.
Wir betrachten also für ein festes x und für $y_1 < y_2$ $y_1, y_2 \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = x \left|\frac{1}{\cos y_1} - \frac{1}{\cos y_2}\right| \tag{1}$$

Da $\frac{1}{\cos y}$ auf $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass ein $a \in [y_1; y_2]$ existiert, so dass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = x \left|\frac{1}{\cos y_1} - \frac{1}{\cos y_2}\right| = \underbrace{x \left|\frac{\sin a}{\cos^2 a}\right|}_{=:L(x;y_1;y_2)} |y_1 - y_2| \tag{2}$$

Die Lipschitz-Konsante $L(x; y_1; y_2)$ hängt noch explizit von y_1 und y_2 ab.

Insbesondere ist $f(x, y)$ ist in y jedoch NICHT global Litpschitz stetig, da es Probleme am Rand gibt. Explizit gilt für $x \neq 0$ und $y_1 = 0; y_2 = \pi/2 - \epsilon$; $\epsilon > 0$, dass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = x \left|1 - \frac{1}{\sin(\epsilon)}\right| \rightarrow_{\epsilon \to 0} \infty \tag{3}$$

Somit kann $\frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|}$ nicht uniform in y_1, y_2 beschräkt werden.
Zusammenfassend erhalten wir also lokale, aber keine globale Eindeutigkeit.

Nur zur expliziten Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{\cos y} \\ \leftrightarrow \cos y dy &= x dx \\ \leftrightarrow \sin(y) &= \frac{1}{2}x^2 + c \\ \leftrightarrow y(x) &= \arcsin\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Mit $y(0) = 0$ erhalten wir $c = 0$ und somit

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}x^2\right) \tag{5}$$

Da $\arcsin : [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$ gilt, ist das maximale Lösungsintervall $x \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ (Beachte, dass $y \neq \pm\pi/2$ gelten muss!

Bepunktung:

- Gleichung(1) gibt einen Punkt.
- Die Anwendung des Mittelwertsatzes (mit der Aussage, dass ein $a \in ...$ existiert), gibt 3 Punkte. Es muss nicht erwähnt werden, dass $\frac{1}{\cos y}$ auf $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig differenzierbar ist.
- Es gilt AUCH die Lösung $\frac{1}{\cos(y)} \in C^1((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \rightarrow \frac{1}{\cos(y)}$ Lipschitz-stetig. Das gibt auch 4 Punkte.
- Die Schlussfolgerung (es muss die Lipschitzabschätzung vorher gemacht worden sein!), dass die DGL lokal eindeutig lösbar ist, gibt einen Punkt.
- Der Beweis, dass die DGL nicht global lösbar ist, wird nicht verlangt. Hierauf gibt es 3 Bonuspunkte (jedoch maximal 10 Punkte für die Aufgabe).
- Das Lösen der DGL (Gleichung (4)) gibt 3 Punkte.
- Das Lösen des Anfangswertproblemes ($c = 0$) gibt einen Punkt.
- Die Angabe des Intervalles $x \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ gibt einen Punkt. Falls jemand $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ schreibt, gibt das trotzdem einen Punkt.

Aufgabe 5 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' = y'' + y' - y.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3$.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ (die Gleichung wird $p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) y = 0$). Die Nullstellen von p sind $c_1 = 1$ (doppelt) und $c_2 = -1$ (einfach). Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann die doppelte Nullstelle c_1 die Lösungen $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{c_1 x}$ und $\varphi_2(x) = x\mathrm{e}^{c_1 x}$ ergibt, und die einfache Nullstelle c_2 nur die Lösung $\varphi_3 = \mathrm{e}^{c_2 x}$. Der Raum aller Lösungen hat Dimension 3 und eine Basis davon ist durch das Fundamentalsystem $\{\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x, \varphi_2(x) = x\mathrm{e}^x, \varphi_3 = \mathrm{e}^{-x}\}$ gegeben.

b) Alle Lösungen können als lineare Kombination von φ_1, φ_2 und φ_3 geschrieben werden. Wir suchen $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $y(x) := a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) + c\varphi_3(x)$ die Anfangsbedingung erfüllt. Wir berechnen die erste und zweite Ableitungen von y, und dafür von jedem φ_i: $\varphi_1'(x) = \varphi_2''(x) = \mathrm{e}^x$, $\varphi_2'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x, \varphi_2''(x) = 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$, $\varphi_3'(x) = -\mathrm{e}^{-x}, \varphi_3''(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Wir setzen die Anfangsbedingungen für y ein und finden das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} y(0) & = & 1 & \Rightarrow \\ y'(0) & = & 0 & \Rightarrow \\ y''(0) & = & 3 & \Rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{rcl} a + c & = & 1 \\ a + b - c & = & 0 \\ a + 2b + c & = & 3 \end{array} \right. .$$

Die Lösung ist $a = 0, b = 1, c = 1$. Das heißt, die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = \varphi_2(x) + \varphi_3(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}.$$

Die Lösung nachzuprüfen ist immer empfehlenswert aber nicht nötig.

Bepunktungsvorschlag: a) gibt 4 Punkte und b) 6 Punkte.

In a): 2 Punkte für das charakteristische Polynom und seine Nullstellen (mit Multiplizität), 2 weitere Punkte für das Fundamentalsystem.

In b): 1 Punkt für den Ansatz $y(x) := a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) + c\varphi_3(x)$, 3 Punkte für eine sinnvolle Übersetzung von den Anfangsbedingungen in ein Gleichungssystem. 2 weitere Punkte bekommt man, wenn die Rechnungen auch noch korrekt sind.