MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2014

Tutorien zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 13

Aufgabe 1

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ (das heißt, die Menge kann als $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ geschrieben werden, für bestimmte Punkte $x_n \in \mathbb{R}$). Geben Sie für jedes $\varepsilon > 0$ eine Vereinigung abzählbar vieler offener Intervallen J an, sodass $M \subset J$ und $\lambda(J) < \varepsilon$.

Bemerkung: Das äußere Lebesgue-Maß kann auch als $\lambda_A(M) := \inf_{J \in \tilde{W}}\{\lambda(J) : J \supset M\}$ *definiert werden, wobei* $\tilde{W}$ *die Menge aller abzählbaren Vereinigungen* ***offener*** *Intervallen ist. Beide Definitionen sind äquivalent. Diese Aufgabe zeigt, dass bezüglich dieser anderen Definition auch jede abzählbare Menge eine Nullmenge ist.*

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Indikatorfunktionen $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ und $g = \mathbf{1}_{[0,1]}$ auf $\mathbb{R}$. Welche der Funktionen ist (i) f.ü. stetig, (ii) f.ü. gleich einer stetigen Funktion?

Bemerkung: Man sagt eine Eigenschaft gilt fast überall (f.ü.), falls sie überall bis auf einer Nullmenge gilt.