MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 0

Überweisen Sie, falls nicht schon geschehen, die Studentenkanzleibeiträge. Beachten Sie die Rückmeldefrist bis zum 01.07!

Aufgabe 1

Sei $M := \{x \in [0,1] \mid \; x \in \mathbb{Q}\}$ und $\mathring{M}$ das Innere, $\overline{M}$ der Abschluss, ∂M der Rand und M^c das Komplement von M in $[0,1]$. Bestimmen Sie das äußere Jordanmaß λ_A und das innere Jordanmaß λ_I aller dieser Mengen. Welche sind Jordanmessbar?

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{C} \subset [0,1]$ die Cantormenge. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{C}$ ist eine Jordan Nullmenge.

(b) $\mathcal{C}$ ist überabzählbar.

Hinweise:

Zur Erinnerung: Die Cantormenge wird als unendlicher Schnitt $\mathcal{C} := \cap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$ definiert, wobei $\mathcal{C}_k$ induktiv folgendermaßen definiert ist: $\mathcal{C}_0 := [0,1]$ und $\mathcal{C}_{k+1}$ entsteht aus $\mathcal{C}_k$, indem man $\mathcal{C}_k$ als disjunkte Vereinigung von 2^k Intervallen darstellt und aus jedem dieser Intervalle das offene mittlere Drittel entfernt.

Stellen Sie für Aufgabenteil (b) die Zahlen in $[0,1]$ in ihrer triadischen Entwicklung dar (0-1-2-Folgen) und überlegen Sie sich, wie die Cantormenge in dieser Darstellung aussieht. Benutzen Sie nun die (aus Analysis I bekannte) Überabzählbarkeit der 0-1-Folgen ($\equiv$ Überabzälbarkeit der Elemente aus $[0,1]$), um die Überabzählbarkeit von $\mathcal{C}$ zu beweisen.

Bemerkung: Die Cantormenge ist beachtlich, da sie ein Gegenbeispiel zu unserer naiven Intuition darstellt, dass überabzählbare Mengen irgendwo kontinuierlich sind bzw. ein nicht verschwindendes Volumen haben sollten. Die Cantormenge ist offenbar nirgendwo kontinuierlich und hat Volumen (Maß) null, gleichzeitig hat sie überabzählbar viele Elemente!

Aufgabe 3

Sei M eine Menge und $A, B \subset M$ nichtleere Teilmengen. Konstruieren Sie die von A und B erzeugte Menge von Teilmengen, d.h. die Menge Ω aller Teilmengen von M, die sich aus den Mengen A und B und allen Mengen, die sich durch elementare Mengenoperationen (Schneiden, Vereinigen und Komplemente bilden) aus diesen Mengen ergibt (eine Skizze wird vermutlich helfen).

Machen Sie sich klar, dass Ω die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $M \in \Omega$ und $\emptyset \in \Omega$

(ii) $\mathcal{G} \in \Omega \Rightarrow \mathcal{G}^c \in \Omega$

(iii) Für jede Familie von Mengen $(\mathcal{G}_n)_{n\in I}$ mit $\mathcal{G}_n \in \Omega$ für alle n in einer (in diesem Fall immer endlichen) Indexmenge I gilt $\bigcup_{n\in I} \mathcal{G}_n \in \Omega$

Bemerkung: Eine Menge Ω von Teilmengen einer Menge M, die die Eigenschaften (i) - (iii) erfüllt (wobei im Allgemeinen in (iii) die Indexmenge I nicht endlich aber abzählbar ist), heißt *σ-Algebra*. Die σ-Algebra des $\mathbb{R}^n$, die (statt von zwei Teilmengen A und B) von den Intervallen (bzw. Quadern für $n > 1$) erzeugt wird, heißt *Borel-Algebra*. Das Konzept der σ-Algebra bzw. Borel-Algebra ist sehr grundlegend für die Maßtheorie und wird in der Vorlesung weiter besprochen. Sie werden sich mit diesen abstrakten Konzepten vermutlich leichter tun, wenn Sie diese Aufgabe durchdacht haben.

Abgabe: Montag, 07.07.2014 , 12 Uhr.