MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Tutorien zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) & = & A\mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}(0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases}, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Die Exponentialfunktion einer Matrix $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ wird auch (wie in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) durch die Reihe

$$\mathrm{e}^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

definiert. Zeigen Sie

a) Für jede Matrix $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ konvergiert die Reihe e^B absolut.

Hinweis: Da alle Normen in $\mathcal{M}_{n\times n}$ äquivalent sind, ist für die Konvergenzfrage irrelevant, welche Norm man betrachtet. Nützlich ist hier die Operatornorm

$$\|B\| := \max_{u\in\mathbb{R}^n, \|u\|\leqslant 1} \|Bu\|.$$

Sie dürfen benutzen, dass für diese Norm $\|B_1B_2\| \leqslant \|B_1\|\|B_2\|$ gilt (und natürlich auch die übliche Eigenschaften von Normen).

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{Ax} = A\mathrm{e}^{Ax}$.

c) $\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\mathbf{y}_0$ löst (1). Diese Lösung ist eindeutig.

d) Für eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist

$$\mathrm{e}^{Dx} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

e) Sei $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonal und $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar. Für die diagonalisierbare Matrix $A = UDU^{-1}$ ist

$$\mathrm{e}^{Ax} = U\mathrm{e}^{Dx}U^{-1}.$$

f) Lösen Sie das Gleichungssystem (1) für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und den Anfganswert $\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.