

Tutorien zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 11

Aufgabe 1

Finden Sie die Allgemeine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) &= x^2 + 3x^2y(x) \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (1)$$

Dazu benutzen Sie die Methode der Variation der Konstanten:

a) Lösen Sie die homogene Gleichung

$$y'(x) = 3x^2y(x).$$

b) Überzeugen Sie sich davon, dass der Ansatz $y(x) = C(x)e^{x^3}$ für die gesuchte Lösung sinnvoll ist. Finden Sie eine passende Funktion $C(x)$, womit $y(x) = C(x)e^{x^3}$ das inhomogene Problem löst.

Zeigen Sie auch, dass die Lösung eindeutig ist.

Hinweis: Welches Anfangswertproblem löst die Differenz $y_1 - y_2$ zweier Lösungen von (1)?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$. Skizzieren Sie S und überlegen Sie sich anschaulich, ob S lokal der Graph einer Funktion ist. Was besagt der Satz der impliziten Funktion in diesem Fall?