MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in z_0 einen Pol der Ordnung n habe. Sei $g : U \to \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung der Funktion $(z - z_0)^n f(z)$ in z_0. Zeigen Sie:

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

(b) Es sei $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z+1}\frac{1}{z-1}$. Bestimmen Sie $\operatorname{res}_1(f)$ indem Sie f in eine Laurentreihe entwickeln, die auf $\mathcal{B}_1(1)$ konvergiert (verwenden Sie wieder die Formel für die geometrische Reihe) und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Formel aus Aufgabenteil (a).

(c) Bestimmen Sie nun den Wert des Integrals

$$\oint_{\partial\mathcal{B}_1(1)} \frac{1}{z^2-1} dz$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{5 + 4\,\sin\varphi}\,d\varphi$$

explizit mithilfe des Residuensatzes.

Explizit bedeutet, dass Sie das entsprechende Kriterium aus der Vorlesung nicht einfach nur anwenden, sondern dessen Begründung am konkreten Beispiel im Detail ausführen: Setzen Sie $\gamma(\varphi) := e^{i\varphi}$ und schreiben Sie mithilfe dieser Setzung obiges Integral als komplexes Wegintegral, also in der Form $\int_0^{2\pi} f(\gamma(\varphi))\,\gamma'(\varphi)\,d\varphi = \int_C f(z)\,dz$. Überlegen Sie sich, für welche Punkte z_0 innerhalb der geschlossenen Kurve C nicht verschwindende Residuen von f zu finden sind, berechnen Sie diese(s) (z.B. mithilfe der Formel aus Aufgabe 1 (a)) und finden Sie so den Wert des gesuchten Integrals.

Aufgabe 3
Betrachten Sie folgende Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

mit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to& \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto& \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass f einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ableitung von f auf ganz R beschränkt ist.

(b) Skizzieren Sie die grafische Lösung der Differentialgleichung für $x > 1$ und den Anfangswert $y(1) = 5$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass für hinreichend grosse y die Funktion $y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ durch y genähert werden kann. Mit Hilfe dieser Approximation können Sie das Vektorfeld für grosse y zeichnen und erhalten so die approximative grafische Lösung als Integralkurve an dieses Vektorfeld.
Alternativ können Sie sich auch das Vektorfeld mit Hilfe der auf den Computern installierten Programmen (z.b. Mathematica) plotten lassen. Eine Dokumentation finden sie z.b. hier: `http://reference.wolfram.com/mathematica/howto/PlotAVectorField.html`

Abgabe: Mittwoch, 11.6.2014 , 10 Uhr.