MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1

Bestimmen Sie bei folgenden Funktionen die Art der Singularität in z_0. Falls ein Pol vorliegt, bestimmen Sie dessen Ordnung.

(a)

$$f(z) = \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i$$

(b)

$$f(z) = \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}, \quad z_0 = -i$$

(c)

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^4}, \quad z_0 = 0$$

Aufgabe 2

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen $z_0 \in U$ und $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. f habe in z_0 einen Pol der Ordnung m und g habe in z_0 einen Pol der Ordnung n, wobei $m < n$. Außerdem sei $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Bestimmen Sie die Art der Singularität in z_0 (und im Falle eines Pols dessen Ordnung) für die holomorphen Funktionen

$$f + g, \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad \text{und} \quad f'$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität hat.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2 + 1}\right)$$

in $z_0 = \mathrm{i}$ eine wesentliche Singularität hat.

Hinweis: Konstruieren Sie eine geeignete Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$; $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$, so dass die Folge $(f(z_m))_{m\in\mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte besitzt. In Teilaufgabe (b) können Sie mit Hilfe der Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}; \lim_{n\to\infty} w_n = \mathrm{i}$ konstruieren, so dass $f(z_m) = g(w_m)$ gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte einer Gaußfunktion wieder eine Gaußfunktion im k-Raum ist. Das heißt, berechnen Sie für $k \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx} \, dx =: \hat{f}(k)$$

um zu sehen, dass $\hat{f}(k)$ die Form $e^{-\alpha k^2}$ hat (für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$).

Anleitung: Sei $g(x) = e^{-x^2} e^{ikx}$ der Integrand. Betrachten Sie zunächst wieder das Integral von $-R$ nach R. Führen Sie nun eine quadratische Ergänzung im Exponenten von g durch, d.h schreiben Sie $g(x)$ in der Form $e^{-(\vartheta(x,k))^2 - \frac{k^2}{4}}$, bestimmen Sie die Funktion $\vartheta(x, k)$, substituieren Sie die Integrationsvariable x durch ϑ und achten Sie darauf, dass die neuen Integrationsgrenzen korrekt gewählt sind. Der neue Integrationsweg verläuft in der unteren komplexen Halbebene parallel zur reellen Achse. Ergänzen Sie diesen Weg zu einem geschlossenen rechteckigen Weg, sodass der obere Teil des Weges wieder entlang der reellen Achse verläuft (zeichnen Sie ein Bild des Weges). Argumentieren Sie, dass die beiden Anteile des Weges, die parallel zur imaginären Achse verlaufen, im Limes $R \to \infty$ keinen Beitrag zum Integral liefern. Überlegen Sie sich nun, ob Punkte mit Residuum ungleich null vom Weg eingeschlossen sind und nutzen Sie den Residuensatz zusammen mit dem bekannten Integral der Gaußfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$ (siehe Blatt 11, Aufgabe 4 des letzten Semesters), um den Wert des gesuchten Integrals zu bestimmen.

Hinweis: Sie können hier statt dem Residuensatz auch einfach den Cauchy-Integralsatz verwenden. Verdeutlichen Sie sich an diesem Beispiel, in welchen Fällen sich der Residuensatz auf den Cauchy-Integralsatz reduziert. In welchen Fällen reduziert er sich auf die Cauchy-Intgralformel?

Abgabe: Montag, 02.6.2012 , 12 Uhr.