MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1

Geben Sie die Laurentreihen folgender Funktionen an und bestimmen Sie die Residuen.

(a) $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^2}$

(b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{K}_{(r,R)}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ der Kreisring (Ringgebiet) zwischen den Kreisen mit Mittelpunkt z_0 und Radius r bzw. R. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in Laurentreihen, die jeweils in folgenden Kreisringen konvergieren:

(a) $\mathcal{K}_{(0,1)}(0)$

(b) $\mathcal{K}_{(1,2)}(0)$

(b) $\mathcal{K}_{(3,\infty)}(1)$

Hinweis: Malen Sie ein Bild der komplexen Ebene und zeichnen Sie die geforderten Konvergenzgebiete aus (a), (b) und (c) sowie die Pole von f ein und machen Sie sich klar, warum die Kreisringe sinnvoll gewählt sind. Sie können mithilfe von Partialbruchzerlegung f schreiben als $f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$. Bringen Sie die beiden Summanden von f (nach Partialbruchzerlegung) jeweils auf die Form des Wertes einer geometrischen Reihe, sodass *beide* Reihen im jeweils geforderten Konvergenzgebiet konvergieren. Fügen Sie anschließend beide Reihen zu einer Laurentreihe zusammen, sodass Sie Haupt- und Nebenteil identifizieren können.

Aufgabe 3

Sei a eine positive, reele Zahl. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

Hinweis: Nutzen Sie zunächst die Symmetrie des Integranden um ein Integral zu bekommen, das über die gesamte reelle Achse läuft. Das uneigentliche Integral ist nun ein Integral von $-R$ nach R im Limes $R \to \infty$. Schließen Sie für endliches R den Integrationsweg durch einen Halbkreis von Radius R in der oberen komplexen Ebene und argumentieren Sie sorgfältig im Detail, dass der Halbkreis im Limes $R \to \infty$ keinen Beitrag zum Integral liefert (d.h. wenden Sie nicht einfach das entsprechende Kriterium aus der Vorlesung an, sondern führen Sie dessen Begründung am konkreten Beispiel aus!).
Um das Residium zu berechnen, können Sie die Cauchy-Integralformel der ersten Ableitung für die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2}$ benutzen.

Abgabe: Montag, 26.05.2014 , 12 Uhr.