MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Beweisen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Hinweis: Nehmen Sie an, es existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $w_0 \in \mathbb{C}$, sodass $|f(z) - w_0| > \varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Konstruieren Sie aus dieser Annahme eine Funktion $g(z)$, die holomorph und beschränkt ist und benutzen Sie den Satz von Liouville um die Annahme zu einem Widerspruch zu den Voraussetzungen zu führen.

Aufgabe 2

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf $\mathbb{R}$ reellwertig. Beweisen Sie: $f(z^*) = (f(z))^*$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass mit f auch $g(z) := (f(z^*))^*$ holomorph ist. Betrachten Sie die Funktion $g - f$ auf der reellen Achse und verwenden Sie den Identitätssatz.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf $\mathbb{R}$ reellwertig, $f \neq konst.$. Beweisen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes, dass $f(z^*)$ nicht holomorph ist.

Hinweis: Bei der Funktion $f(z^*)$ wird Ihnen Aufgabenteil (a) zusammen mit der Tatsache, dass auf ganz $\mathbb{C}$ reellwertige und komplex differenzierbare Funktionen konstant sind (warum?), behilflich sein.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass jede ganze (d.h. in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| \leq a + b|z|^{n+\alpha}$ mit $a, b > 0; n \in \mathbb{N}$ und $\alpha < 1$ ein Polynom von maximalen Grad n ist.

Aufgabe 4 (Staatsexamensaufgabe)

Für $r > 0$ sei $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Für welche r gibt es eine holomorphe Funktion $f : D_r \to \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, ...$?

Abgabe: Montag, 19.6.2014 , 12 Uhr.