MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/z$.
Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Stammfunktion $\ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ von f mit $\ln(1) = 0$ existiert.

Hinweis: Sie müssen also zwei Dinge zeigen: Existenz und Eindeutigkeit.

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$(i) \quad \oint_{\partial\mathcal{B}_2(0)} \frac{\sin(z)}{z+i} dz \qquad\qquad (ii) \quad \oint_{\partial\mathcal{B}_3(-2i)} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$$

Dabei bezeichnet $\partial\mathcal{B}_r(z_0)$ den Kreis von Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$ in positivem Umlauf.

Hinweis: Bringen Sie die Integrale in die Form der Cauchy-Integralformel, dann können Sie das Ergebnis einfach ablesen. Sie müssen dabei zwei Dinge beachten: Die Funktion $f(z)$ in der Integralformel muss holomorph innerhalb des Kreises sein über den integriert wird (darf also insbesondere nirgendwo in diesem Bereich singulär sein), die Nullstelle des Nenners in der Integralformel muss innerhalb dieses Kreises liegen.

(b) Berechnen Sie

$$\oint_{\partial\mathcal{B}_1(0)} \frac{dz}{z^2 - a^2}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 1$.

Hinweis: Es gibt zwei relevante Fälle in Abhängigkeit von a, welche sind das? In einem Fall wird Ihnen der Cauchy-Integralsatz behilflich sein, im anderen können Sie zunächst weder Integralformel noch Integralsatz direkt anwenden (warum?). Sie können allerdings verwenden, dass sich der Integrand mit Partialbruchzerlegung schreiben lässt als

$$\frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{1}{(z-a)(z+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass jede ganze (d.h. in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| < |z|^\alpha$ und $\alpha < 1$ konstant ist.

Hinweis: Schätzen Sie $|f(z) - f(0)|$ für ein beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mithilfe der Cauchy-Integralformel für einen beliebig großen Kreis um die null (der z enthält) ab.

Abgabe: Montag, 5.5.2014 , 12 Uhr.