

Tutorien zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 3

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Cosinus- und Sinusfunktion, gegeben für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Liouville, dass diese Funktionen unbeschränkt sind (hier gilt es nicht mehr $|\cos z|, |\sin z| \leq 1$!).
- b) Zeigen Sie, dass diese Funktionen jeden Wert $c \in \mathbb{C}$ annehmen (an unendlich vielen Stellen sogar).

Hinweis: Für den Cosinus lösen Sie die Gleichung $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = c$ erstmal für $y = e^{iz}$. Sie werden zwei Lösungen y_1, y_2 finden. Dann existiert es $z \in \mathbb{C}$ (unendlich viele eigentlich), mit $e^{iz} = y_1$ (Warum? Denken Sie an die Aufgabe 2 letztes Tutoriumsblatts zurück).

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{z - c} dz,$$

für $c \in \mathbb{C} \setminus \partial B_R(0)$.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $c \in B_R(0)$ und $c \notin B_R(0)$.