MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2014

Übungen zu Lebesguetheorie, Funktionentheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1

(a) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$ und $\exp|_U : U \to \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ die auf U eingeschränkte Exponentialfunktion. Zeigen Sie: $\exp|_U$ ist bijektiv.

(b) Sei nun $\ln : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to U$ durch $\ln(z) := \ln(|z|) + \mathrm{i} \arg(z)$ gegeben.
Hierbei beizechnet $\ln(|z|) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ den bekannten, auf $\mathbb{R}^+$ definierten Logarithmus, $\arg(z) = \varphi \in (-\pi, \pi)$ für $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Zeigen Sie: $\ln(z)$ ist bijektiv.

(c) Zeigen Sie, dass $\ln(z)$ die Umkehrfunktion von $\exp|_U$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\ln(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ komplex differenzierbar ist.

(e) Berechnen Sie nun $(\ln(z))'$.

(f) Es sei $z = r_z e^{i\varphi_z}$ und $w = r_w e^{i\varphi_w}$, mit $\varphi_z, \varphi_w \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie:

$$\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w) + \begin{cases} 2\pi i & \text{falls} \quad \varphi_z + \varphi_w \in (-2\pi, -\pi) \\ 0 & \text{falls} \quad \varphi_z + \varphi_w \in (-\pi, \pi) \\ -2\pi i & \text{falls} \quad \varphi_z + \varphi_w \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

(g) Wir definieren für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $a \in \mathbb{C} : z^a := \exp(a \ln(z))$. Berechnen Sie $(z^a)'$. Bestimmen Sie den Wert (d.h. Real- und Imaginärteil) der Ableitung im Punkt $z = i$ für $a = i + 1$.

Hinweis: Leiten Sie für Aufgabenteil (e) die Gleichung $z = e^{\ln(z)}$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ab. Für Aufgabenteil (f) können Sie den Ausdruck $\ln(zw)$ in die Form $\ln(e^u)$ bringen. Wann gilt $u \in U$? Nutzen Sie in den Fällen $u \notin U$ die 2π-Periodizität der Exponentialfunktion, um u derart zu modifizieren, dass Sie den ln anwenden dürfen.

Aufgabe 2
Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale:

(a) $\int_\gamma dz \sin((\mathrm{i}+z))$ für $\gamma(t) = tb + (1-t)a,\ t \in [0;1],\ a, b \in \mathbb{C}$.

(b) $\int_\gamma dz\ \frac{1}{z}$, wobei γ ein Dreieick mit den Eckpunkten $z_1 = -1-\mathrm{i},\ z_2 = 1-\mathrm{i},\ z_3 = 2\mathrm{i}$ darstellt, welches im Gegenuhrzeigersinn (positive Orientierung) durchlaufen wird.

(c) $\int_\gamma dz\ z^2$, mit γ aus Teilaufgabe (b).

(d) $\int_\gamma dz\ z$ mit $\gamma(t) = ae^{\mathrm{i}t} + be^{-\mathrm{i}t},\ t \in [0; 2\pi],\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$. Skizzieren Sie γ in der komplexen Ebene.

(e) $\int_\gamma dz\ |z|$ mit $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}(\pi - t)}, t \in [0;\pi]$.

(f) Was ist der Wert des Integrales $\int_\gamma dz\ \frac{1}{z}$ mit $\gamma(t) = ae^{\mathrm{i}t} + be^{-\mathrm{i}t},\ t \in [0; 2\pi],\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$?

Hinweis: In Aufgabenteil (f) müssen Sie die Fälle $a > b$ und $a < b$ unterscheiden (wieso?). Wieso ist es möglich, das Integral ohne explizite Rechnung zu bestimmen?

Abgabe: Mittwoch, 28.04.2014 , 12 Uhr.