MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

SoSe 2014

Tutorien zu Funktionentheorie, Lebesguetheorie und gewöhnlichen Differentialgleichungen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und Imaginärteil $w = \operatorname{Im} f$. Zeigen Sie:

a) Ist f stetig, so sind u und w auch stetig.

b) Ist f holomorph und u, w zweimal stetig differenzierbare Funktionen in x und y, dann sind u und w harmonische Funktionen, d.h. sie lösen die Laplace-Gleichung:

$$\Delta u = (\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0 \quad \text{und} \quad \Delta w = (\partial_x^2 + \partial_y^2)w = 0.$$

c) Seien f, u und w wie in b). Dann stehen die Gradienten von u und w bezüglich der Basis $(1, \mathrm{i})$ in jedem Punkt $z \in U$ senkrecht aufeinander, d.h. es gilt

$$\langle \nabla u, \nabla w \rangle = 0, \quad \text{mit} \quad \nabla := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Exponentialfunktion $\exp(z) = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$.

a) Skizzieren Sie auf die komplexe Ebene das Bild unter der Exponentialfunktion von Geraden der Form

$$V_a := \{a + \mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad H_b := \{x + \mathrm{i}b \mid x \in \mathbb{R}\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

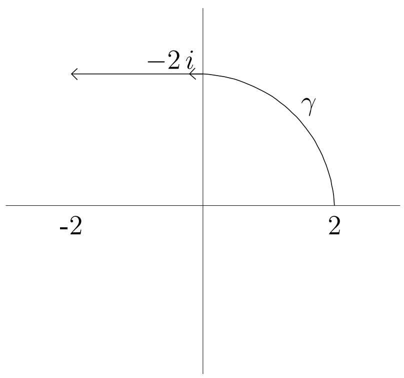
b) Ist die Exponentialfunktion auf der Mengen V_a und H_b injektiv? Wenn nicht, finden Sie maximale Teilmengen, wo sie bijektiv ist.

c) Bestimmen Sie $\exp(\mathbb{C})$. Geben Sie die Urbildmenge eines beliebigen $z \in \exp(\mathbb{C})$ an.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale in der komplexen Ebene:

a) $\int_\gamma z^{-2}\,\mathrm{d}z$, für γ



b) $\int_{\partial B_R(0)} z^n\,\mathrm{d}z$, für $n = -2, -1, 49$, wobei $B_R(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

c) Hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf $\partial B_R(0)$? D.h., existiert es $F : U \supset \overline{B_R(0)} \to \mathbb{C}$ holomorph, mit $F'(z) = \frac{1}{z}$ auf $\partial B_R(0)$?