Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 13

Aufgabe 1: *Satz von Stokes*

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Fläche $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}$ und ∂M ihr Rand (eine Kurve im $\mathbb{R}^3$). M sei so orientiert, dass die Normalenvektoren auf der Fläche in Richtung der positiven z-Achse zeigen. Sei außerdem v das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)^T.$$

(a) Skizzieren Sie M und ∂M!

(b) Berechnen Sie explizit das Integral

$$I = \int_{\partial M} \langle v, ds \rangle.$$

(c) Berechnen Sie I nun mithilfe des Satzes von Stokes!

Aufgabe 2: *Satz von Gauß I*

Es sei

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(\Phi(r,\varphi,\theta)) = \frac{1}{r}\vec{e}_r + r\cos\theta\,\vec{e}_\theta,$$

wobei $\vec{e}_r := \frac{\partial\Phi(r,\varphi,\theta)/\partial r}{\|\partial\Phi(r,\varphi,\theta)/\partial r\|}$ (Einheitsvektor in Richtung r) sowie $\vec{e}_\theta := \frac{\partial\Phi(r,\varphi,\theta)/\partial\theta}{\|\partial\Phi(r,\varphi,\theta)/\partial\theta\|}$ (Einheitsvektor in Richtung θ). Dabei bezeichnet Φ die Kugelkoordinatenabbildung (siehe Aufgabe 1, Blatt 12).

(a) Berechnen Sie explizit durch Flächenintegration das Integral

$$I = \int_{S^2(R)} \langle \vec{F}, d\vec{A} \rangle,$$

wobei $S^2(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R\}$. *Tipp:* Bei einer Kugel ist das Normalenvektorfeld radial, d.h. $\vec{n} = \vec{e}_r$ in $d\vec{A} = \vec{n}dA$.

(b) Berechnen Sie I durch Anwendung des Satzes von Gauß! Benutzen Sie dazu, dass die Divergenz in Kugelkoordinaten durch $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, F_\theta) + F_\varphi$ gegeben ist, wobei F_r, F_θ, F_φ die Komponenten von $\vec{F}$ in r,θ,φ-Richtung sind (z.B. ist $F_r = \langle \vec{e}_r, \vec{F} \rangle = \frac{1}{r}$).

Aufgabe 3: *Satz von Gauß II: Kontinuitätsgleichungen und Erhaltungsgrößen*

In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass eine Kontinuitätsgleichung zu einer Erhaltungsgröße führt. Dies spielt in vielen Bereichen der Physik, z.B. der Elektrodynamik, der Fluidmechanik und der Quantenmechanik, eine wichtige Rolle. Eine *Kontinuitätsgleichung* ist eine Gleichung der Form

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x},t) = \frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t}.$$

Hierbei bezeichnet $\vec{j} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ einen *Strom* und $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Dichte*. (Immer wenn Sie die Wörter "Strom" und "Dichte" hören, bezieht sich das auf eine Kontinuitätsgleichung.) Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x},t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial j_k}{\partial x_k}$ bezieht sich nur auf die Raumvariablen. Definieren Sie die Größe

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x},t) d^3x.$$

Zeigen Sie nun unter der Annahme, dass $\vec{j}(\vec{x},t) \cdot |\vec{x}|^2$ für $|\vec{x}| \to \infty$ gegen Null geht, dass $\frac{dQ(t)}{dt} = 0$ gilt, dass also der Wert von Q in der Zeit erhalten ist! Benutzen Sie dafür die Kontinuitätsgleichung oben sowie den Satz von Gauß!

Aufgabe 4: *Satz von Gauß III: Anwendung in der Elektrostatik*

Betrachten Sie eine homogene Ladungsdichte innerhalb einer Kugel mit Radius R ($r = |\vec{x}|$):

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_0, & r \le R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Diese Aufgabe gibt eine Anleitung, wie man mithilfe des Satzes von Gauß sowie der ersten Maxwellgleichung

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

das elektrische Feld $\vec{E}$ der Kugel außerhalb des Kugelvolumens bestimmen kann. ε_0 ist eine Konstante. (Wir bezeichnen hierbei vektorielle Größen im dreidimensionalen Raum mit Vektorpfeilchen.)

(a) Berechnen Sie für $r \ge R$ das Integral

$$\Phi(r) = \int_{S^2(r)} \langle \vec{E}, d\vec{A} \rangle,$$

indem Sie erst den Satz von Gauß anwenden und dann die erste Maxwellgleichung verwenden! Hierbei: $S^2(r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = r\}$. Verwenden Sie in Ihrem Ergebnis den Zusammenhang $\rho_0 = \frac{Q}{V_{\text{Kugel}}}$, wobei V_{Kugel} das Volumen der Kugel ist! Q bezeichnet die Gesamtladung der Kugel.

(b) Berechnen Sie nun für $r \ge R$ das Integral $\Phi(r) = \int_{S^2(r)} \langle \vec{E}, d\vec{A} \rangle$, indem Sie den Zusammenhang $d\vec{A} = \vec{e}_r dA$ benutzen, wobei $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor ($\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, $\langle \vec{e}_r, \vec{e}_r \rangle = 1$) in radialer Richtung ist. Aufgrund der radialen Symmetrie der Kugelverteilung dürfen Sie annehmen, dass $\vec{E}(\vec{x}) = E(r)\vec{e}_r$ gilt, wobei $E(r) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Das verbleibende Flächenintegral kann dann sehr einfach in Kugelkoordinaten gelöst werden. Beachten Sie, dass dieses Integral keine Integration über r mehr enthält!

(c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) und setzen Sie sie zusammen, um $\vec{E}(\vec{x})$ anzugeben!