MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1: *Kugelkoordinaten*

Kugelkoordinaten sind definiert durch (vgl. Aufgabe 3 (c), Blatt 5):

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

wobei $r \in (0,\infty)$, $\varphi \in (0,2\pi)$ und $\theta \in (0,\pi)$ (siehe Abbildung).

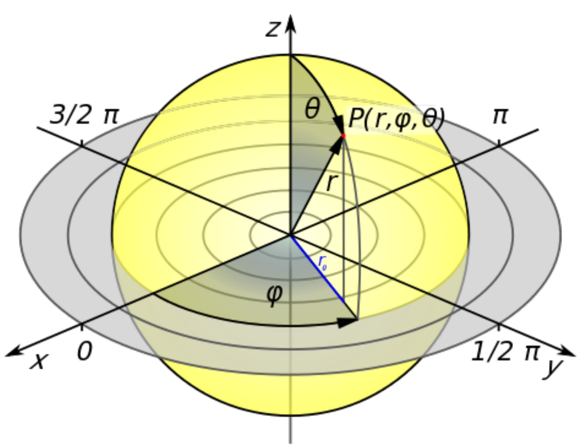
(a) Überlegen Sie, was das Bild von Φ ist! Ist es der ganze $\mathbb{R}^3$? Wenn nicht, welche Mengen fehlen?

(b) Berechnen Sie $D\Phi(r,\varphi,\theta)$ sowie $|\det(D\Phi(r,\varphi,\theta))|$!

(c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus (b) sowie den Transformationssatz, um das folgende Volumenintegral zu berechnen:

$$\int_V \frac{x}{x^2+y^2+z^2} d^3x,$$

wobei V ein Kugelsegment mit $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < \pi$, $0 < \varphi_0 < \varphi < \varphi_1 < 2\pi$ und $0 < r_0 < r < r_1$ bezeichne. (d^3x steht für das Volumenelement, nicht für dreifache Integration bzgl. x!)



Aufgabe 2: *Flächeninhalt des Graphen einer Funktion*

Sei $f : M \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Ihr *Graph* ist definiert als die Menge

$$\operatorname{graph} f := \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) | (x_1, x_2) \in M\}.$$

Für dieses f gilt offensichtlich: $\operatorname{graph} f \subset \mathbb{R}^3$. Genauer gesagt ist $\operatorname{graph} f$ eine zweidimensionale Fläche im dreidimensionalen Raum.

(a) Berechnen Sie für ein solches allgemeines f den Flächeninhalt von $\operatorname{graph} f$! Suchen Sie dazu zunächst eine Parametrisierung von $\operatorname{graph} f$! (Dies ergibt eine sehr nützliche Formel, denn oft kann man Flächen als Graph von Funktionen schreiben.)

(b) Sei nun $f : B_2(1) \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$. Hierbei ist $B_2(1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Skizzieren Sie $\operatorname{graph} f$ und benutzen Sie Ihre Formel aus (a), um den numerischen Wert des Flächeninhalts von f anzugeben!

Aufgabe 3: *Satz von Stokes*

Sei

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{S^1(R)} \langle v, ds \rangle,$$

wobei $S^1(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = R\}$ ein Kreis mit Radius R ist, einerseits explizit und andererseits durch Anwendung des Satzes von Stokes!

Tipp: Ergänzen Sie für den zweiten Teil v um eine z-Komponente, sodass Sie den Satz von Stokes für den dreidimensionalen Raum anwenden können!

Aufgabe 4: *Identitäten mit Rotation und Divergenz*

Es seien $v, w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweifach stetig differenzierbare Vektorfelder sowie $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass folgende Identitäten gelten:

(a) $\operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle + f \operatorname{div} v$,

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$,

(c) $\operatorname{div}(v \times w) = w \operatorname{rot} v - v \operatorname{rot} w$,

(d) $\operatorname{rot}(f \operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g$.