MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

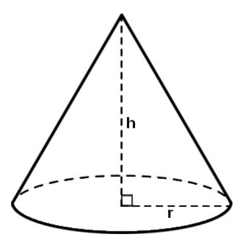
Blatt 11

Aufgabe 1: *Kegel*

(a) Finden Sie geeignete Koordinaten für einen Kegel mit Radius r und Höhe h!

(b) Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes die Oberfläche des Kegels!

(c) Berechnen Sie als nächstes sein Volumen!

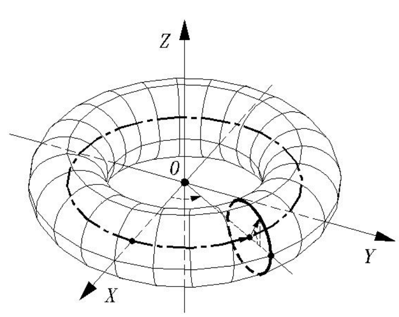


Aufgabe 2: *Torus*

(a) Finden Sie geeignete Koordinaten für einen Torus! Hierbei sei r der Radius des Querschnitts des Rings und $R > r$ der Abstand des Mittelpunkts des Rings vom Ursprung.

(b) Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes die Oberfläche des Torus!

(c) Berechnen Sie nun auch sein Volumen!



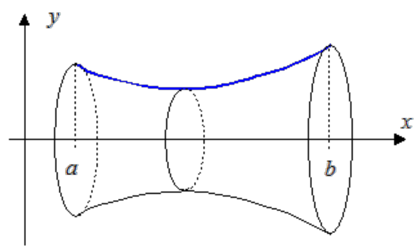
Aufgabe 3: *Rotationsvolumina und -flächen*

Es sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ gegeben. Betrachten Sie das Objekt, das durch Rotation um die x-Achse entsteht (Rotationsvolumen).

(a) Finden Sie geeignete Koordinaten für das Objekt! (*Tipp:* Denken Sie an Polarkoordinaten und modifizieren Sie diese geeignet!)

(b) Gewinnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes Formeln für Oberfläche und Volumen des Objekts!

(c) Wenden Sie diese Formeln an, um die Ergebnisse aus Aufgabe 1 zurückzugewinnen!



Aufgabe 4: *Mehrdimensionale Gaußintegrale*

Es sei A eine positiv-definite symmetrische $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen. Wir bezeichnen ihre Eigenwerte mit $\lambda_i,\ i = 1, .., n$. Betrachten Sie das *mehrdimensionale Gaußintegral:*

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T A x}\, d^n x,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie mithilfe des Transformationssatzes:

$$I = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}.$$

Tipp: Diagonalisieren Sie A und verwenden Sie die Koordinaten, die dieser Diagonalisierung entsprechen! (Damit können Sie das Problem auf das eindimensionale Gaußintegral aus Aufgabe 4, Blatt 10 zurückführen.)