MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1: *Kurvenintegral*

Betrachten Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3,\ f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||^3}\ ,$$

entlang der folgenden Kurve:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}\ t \in [0, 4\pi].$$

(a) Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen und entscheiden Sie, ob es sich bei f um ein Gradientenvektorfeld handelt! Was bedeutet Ihr Ergebnis für das Kurvenintegral und warum?

(b) Suchen Sie nach einem Potential von f! Was bedeutet Ihr Ergebnis für das Kurvenintegral und warum?

Tipp: Betrachten Sie den Gradienten von $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}$!

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral explizit!

Aufgabe 2: *Flächenintegral und Satz von Fubini*

Skizzieren Sie die Menge $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ |y| \leq x\}$ und zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini:

$$\int_D \sqrt{1 - x^2}\ d^2x = 2 - \sqrt{2}$$

Tipp: Zerlegen Sie D in die Mengen $D_1 = D \cap ([0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times \mathbb{R})$ und $D_2 = D \cap ([\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \times \mathbb{R})$.

Aufgabe 3: *Integration mithilfe von Polarkoordinaten*

Betrachten Sie die Polarkoordinaten des $\mathbb{R}^2$, gegeben durch die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass ϕ nicht injektiv ist! Berechnen Sie die Jacobimatrix $\mathcal{D}_{(r,\varphi)}(\phi)$ von ϕ im Punkt (r, φ)!

(b) Überlegen Sie sich, welche Teilmengen aus der Urbildmenge $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ und der Bildmenge $\mathbb{R}^2$ jeweils entfernt werden müssen, um für die entsprechende Einschränkung von ϕ eine bijektive Abbildung zu bekommen und argumentieren Sie, dass in der Tat der Transformationssatz angewendet werden kann:

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass die Funktion $(r, \varphi) \mapsto (f \circ \phi)(r, \varphi) \cdot |\det \mathcal{D}_{(r,\varphi)}(\phi)|$ auf $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ integrierbar ist, dann ist auch f über $\mathbb{R}^2$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d^2x = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{[0,2\pi]} (f \circ \phi)(r, \varphi) \cdot |\det \mathcal{D}_{(r,\varphi)}(\phi)|\, dr\, d\varphi$$

Aufgabe 4: *Trick zur Berechnung des Gaußintegrals*

Berechnen Sie das Integral der Gaußfunktion, d.h. zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{1}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$! Gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Beweisen Sie mithilfe des Transformationssatzes unter Verwendung von Aufgabe 3:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d^2x \;=\; \pi.$$

(b) Begründen Sie mithilfe des Satzes von Fubini die Integrierbarkeit der Gaußfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ und die Gültigkeit der Gleichung

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy\right) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d^2x.$$

(c) Beweisen Sie nun die Integralformel (1) .