Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1: *Koordinatentransformation zu Polarkoordinaten*

Eine *Koordinatentransformation* ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : A \to B$, wobei $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit stetig differenzierbarem Inversen $\Phi^{-1} : B \to A$. Wenn ein Punkt $x = (x_1, ..., x_n) \in A$, dann ergibt $\Phi(x_1, ..., x_n) =: y \in B$ einen Punkt in B. In der Geometrie kann man Punkte im realen Raum durch verschiedene Koordinaten bezeichnen, d.h. Koordinaten sind immer nur willkürlich gewählte Hilfsmittel.
Ein Beispiel, das Ihnen sehr oft begegnen wird, sind die *Polarkoordinaten*. Diese sind definiert durch die folgende Koordinatentransformation von Polarkoordinaten zu *kartesischen Koordinaten* (letztere sind die gewohnten Koordinaten (x, y) von $\mathbb{R}^2$):

$$\Phi : (0, \infty)\times(0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2\backslash\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}, \quad \Phi(r, \varphi) = (x(r, \varphi), y(r, \varphi))^T = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T.$$

(a) Zeichnen Sie die Bilder der Linien $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 | r = 1, 2, 3\}$ und $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 | \varphi = \frac{n\pi}{4}, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ unter Φ!

(b) Gegeben eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, berechnen Sie die Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial r} f(\Phi(r, \varphi)) = \frac{\partial}{\partial r} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f(\Phi(r, \varphi)) = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)).$$

Hinweis: Wenden Sie die mehrdimensionale Kettenregel auf $(f \circ \Phi)(r, \varphi)$ an!

(c) Invertieren Sie die gefundene Beziehung, um $\operatorname{grad} f$ im Punkt $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$ anzugeben!

Bemerkung: Das ist die einfachste Methode, um auch allgemein Differentialoperatoren wie z.B. $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ in andere Koordinaten umzuschreiben. Sie berechnen so auf einfache Weise das Ergebnis der "Kürzungsregel" $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$, wobei die (eigentlich wichtigen) Punkte, in denen die Ausdrücke ausgewertet werden, nicht ausgeschrieben sind. (Das Ergebnis der "Kürzungsregel" direkt auszurechnen geht auch, erfordert es aber, das Inverse von Φ zu bilden, was bei allgemeinen Koordinaten sehr schwierig sein kann.)
Für mehrfache Differentiationen können Sie aus der Kürzungsregel einfach den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ablesen, d.h. die lineare Abbildung $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$, und diese dann mehrfach hintereinander auf eine Funktion wirken lassen.

Aufgabe 2: *Vektorfeld und "Arbeitsintegral"*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$ das schon aus der Vorlesung bekannte Vektorfeld $f(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)^T$.

(a) Zeigen Sie durch Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma \langle f, ds \rangle$$

über kreisförmige Kurven, die den Ursprung n-mal umlaufen, dass Integrale vom Weg (und nicht nur Anfangs- und Endpunkt der Kurve) abhängen! Benutzen Sie dazu Polarkoordinaten!

(b) Betrachten Sie $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2$, wobei $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$, aber mit der gleichen funktionalen Form wie zuvor. Zeigen Sie nun mit einem allgemeinen Argument, dass Kurvenintegrale $\int_\gamma \langle f, ds \rangle$ wegunabhängig sind. (Es versteht sich, dass die Wege dann nur im Definitionsbereich von f liegen dürfen.)

(c) Berechnen Sie eine "Potentialfunktion" für f mit Definitionsbereich wie in (b), d.h. Funktion $V : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, für die $(\operatorname{grad} V)^T = f$ gilt. Betrachten Sie dazu das "Arbeits-integral"

$$\int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

entlang eines selbst gewählten Wegs $\gamma : [a,b] \to \mathbb{H}$ mit $\gamma(a) = (1,0)$ und $\gamma(b) = (x,y)$.

Tipp: Denken Sie wieder an Polarkoordinaten und setzen Sie γ aus zwei Teilwegen zusammen, bei denen einmal nur der Radius verändert wird und einmal nur der Winkel!

Aufgabe 3: *Integrabilitätsbedingungen und Arbeitsintegrale*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f_\alpha : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \;\; f_\alpha(x,y,z) = \left(\alpha\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \log(xy)\right)^T, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen für f_α und bestimmen Sie so, für welche Werte von α das Vektorfeld f_α Gradient eines Potentials ist; d.h. für welche Werte von α existiert eine skalare Funktion F_α mit der Eigenschaft $f_\alpha = (\operatorname{grad} F_\alpha)^T$. Geben Sie das Potential F_α explizit an!

(b) Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Arbeitsintegral von f_α entlang der Kurve

$$\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^3, \;\; \gamma(t) = \left(e^{t^2}, 1, \sin(\pi t)\right)^T.$$