MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1: *Extrema unter Nebenbedingungen: die barometrische Höhenformel*

Wir betrachten eine Fragestellung aus der Physik: Die Verteilung von (der Einfachheit halber ununterscheidbaren) Luftmolekülen in einem konstanten Gravitationsfeld.
Zur mathematischen Modellierung unterteilen wir den Raum mit steigender Höhe h in Kästen $j = 1, ..., m$. Im j-ten Kasten habe ein Teilchen die Energie E_j. (Im Falle des konstanten Gravitationsfelds ist $E_j(h_j) = mgh_j$, wobei m die Masse der Teilchen ist, g die Gravitationskonstante und h_j die Höhe des j-ten Kastens.)
Nach einem zentralen Prinzip der statistischen Physik ist diejenige Verteilung für einen Makrozustand am wahrscheinlichsten, die *bei gleichzeitiger Berücksichtigung der physikalischen Gesetze* die größte Anzahl von Mikrozuständen hat, die zu diesem Makrozustand führen. Makrozustände sind hier die Teilchenzahlen n_j, $j = 1, ..., m$, in den jeweiligen Kästen. Mikrozustände entsprechen den detaillierten Angaben, in welchem Kasten j sich jedes Teilchen i befindet.
Die Anzahl möglicher Verteilungen von N_0 ununterscheidbaren Teilchen auf m Kästen, sodass sich im j-ten Kasten n_j Teilchen befinden, ist:

$$W_N = \frac{N_0!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}.$$

Da N_0 sehr groß ist, dürfen wir alle n_j als kontinuierliche Variablen behandeln und die Approximation $\log(n!) \approx n \log(n) - n$ benutzen.
Gleichzeitig müssen folgende Gesetze der Physik befolgt werden:

(a) Konstanz der Gesamtenergie: $E(n_1, ..., n_m) = \sum_{j=1}^m n_j E_j \stackrel{!}{=} E_0$.

(b) Konstanz der Teilchenzahl: $N(n_1, ..., n_m) = \sum_{j=1}^m n_j \stackrel{!}{=} N_0$.

Wir formulieren dies wie folgt als Extremwertproblem unter Nebenbedingungen: Wir suchen das Maximum der Funktion

$$f : \underbrace{(0, N_0] \times \cdots \times (0, N_0]}_{m-\text{mal}} \to \mathbb{R}, \quad f(n_1, \cdots, n_m) = \log(W_N)$$

unter den beiden Nebenbedingungen (a) und (b). (Aufgrund der strikten Monotonie und Stetigkeit des Logarithmus hat die Funktion W_N genau dann ein Maxiumum, wenn f eines hat.)
Bestimmen Sie so die Verteilung $n_j(E_j)$ mithilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren!

Aufgabe 2: *Kettenregel*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine total differenzierbare Abbildung.

(a) Sei $m = n$ sowie f invertierbar mit total differenzierbarem Inversen $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie mit Hilfe der Kettenregel folgenden Zusammenhang zwischen den totalen Ableitungen (Jacobimatrizen) von f und f^{-1}: Sei $y = f(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}.$$

(b) Sei $m = 1$, sowie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Benutzen Sie die Kettenregel, um die totale Ableitung der Abbildung $f \circ \gamma$ zu bestimmen!

(c) Denken Sie an Aufgabe 2 (c) auf Blatt 6 zurück. Benutzen Sie das Ergebnis aus (b) um zu zeigen, dass der Gradient einer Abbildung immer senkrecht auf den Höhenlinien steht!

Aufgabe 3: *Kurvenintegrale*

(a) Sei $f : [\frac{3}{2}, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\frac{2}{3}x - 1)^{3/2}$. Berechnen Sie die Länge des Graphen $\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) | x \in [\frac{3}{2}, b]\}$!

Hinweis: Der Graph von f wird durch die Kurve $\gamma : [\frac{3}{2}, b] \to \operatorname{graph} f$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ parametrisiert. Sie brauchen nun nur noch die Länge der Kurve γ auf folgende Art und Weise zu bestimmen:

$$L(\gamma) = \int_{\frac{3}{2}}^{b} \|\gamma'(t)\| dt.$$

(b) Es sei im $\mathbb{R}^2$ folgendes Vektorfeld gegeben: $F(x, y) = (x + y^2, y + 1)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

wobei $\gamma : [a, b] \to \partial D$ eine Parametrisierung des Randes ∂D des Dreiecks D mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 0)$ und $(1, 1)$ sei.