MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1: *Ableitungsregeln*

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbare Vektorfelder und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein total differenzierbares Skalarfeld. Wir notieren mit $\mathcal{J}_\varphi$ die Jacobimatrix einer beliebigen total differenzierbaren Abbildung φ. Beweisen Sie folgende Produktregeln:

(a)
$$\mathcal{J}_{(f\phi)} = \mathcal{J}_f\phi + f \cdot \operatorname{grad}\phi.$$
Beachten Sie hier, dass der Ausdruck $f \cdot \operatorname{grad}\phi$ als Produkt der $m \times 1$-Matrix f (als Vektor im $\mathbb{R}^m$) mit der $1 \times n$-Matrix $\operatorname{grad}\phi$ eine $m \times n$-Matrix ergibt (genauso wie $\mathcal{J}_f$ und $\mathcal{J}_f\phi$).

(b) Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:
$$\mathcal{J}_{\langle f,g\rangle} = f^T \cdot \mathcal{J}_g + g^T \cdot \mathcal{J}_f \ ,$$
mit den Zeilenvektoren f^T und g^T, die sich durch Transposition der m-dimensionalen Spaltenvektoren f und g ergeben.

(c) Seien $m = n$ und $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})^T$ der *Nabla-Operator* im $\mathbb{R}^n$. Außerdem notiere $\operatorname{div}(g)$ die *Divergenz* einer Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
$$\operatorname{div}(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_j}.$$
Hierbei seien $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von h. Zeigen Sie:
$$\operatorname{div}(f\phi) = \operatorname{div}(f)\phi \ + \langle f, \nabla\phi\rangle$$

Aufgabe 2: *Extrema unter Nebenbedingungen*

Seien $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + 2y^2 = 9\}$ und $f : V \to \mathbb{R}, \ \ f(x, y) = x^3 - y^3$. Bestimmen Sie lokale und globale Extrema von f in V, sowie diejenigen Stellen in V, an denen die Extrema angenommen werden.

Hinweis: Da f stetig ist und V kompakt, dürfen Sie voraussetzen, dass f in V ein Maximum und ein Minimum besitzt. (Denn das Bild $f(V) \subset \mathbb{R}$ ist eine kompakte Menge, also abgeschlossen und beschränkt.)

Aufgabe 3: *Extrema auf einer abgeschlossenen Menge mit nichtleerem Inneren*

Betrachten Sie die Funktion f aus Aufgabe 2. Bestimmen Sie diesmal die Extrema von f auf der Menge $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + 2y^2 \leq 9\}$! Beachten Sie, dass im Inneren von W neue kritische Stellen auftauchen können und dass vielleicht manche der Extrema auf dem Rand $\partial W = V$ keine Extrema in W sind!

Aufgabe 4: *Optimierungsproblem die Zweite*

Beweisen Sie durch die Methode der Lagrange-Multiplikatoren (Extrema unter Nebenbedingungen): Bei gegebenem Volumen V hat der Würfel unter allen Quadern die kleinste Oberfläche O.