MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1: *Zusammenhänge zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit*

Beweisen Sie:

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ist f im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbar, so ist f in a stetig.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f habe stetige dritte partielle Ableitungen $\partial_i \partial_j \partial_k f$ im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$. ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.) Dann gilt: $\partial_i \partial_j \partial_k f(a) = \partial_{\sigma(i)} \partial_{\sigma(j)} \partial_{\sigma(k)} f(a)$ für alle Permutationen σ.

Aufgabe 2: *Zweidimensionale Gaußfunktion: Extrema, Gradient und Höhenlinien*

Betrachten Sie die zweidimensionale Gaußfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, sowie für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ die Abbildung $\gamma_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_c(t) = (c\cos(t), c\sin(t))$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze von $\operatorname{graph} f = \{(x, y, f(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ für $x, y \in [-2, 2]$ zusammen mit den Mengen $H_c = \{(\gamma_c(t), f(\gamma_c(t))) : t \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{R}^3$ für $c = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ an!

(b) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema von f!

(c) Zeigen Sie, dass $\gamma_c'(t)$ für alle c und t senkrecht (bzgl. des Standardskalarprodukts) auf $\operatorname{grad} f(a)$ in $a = \gamma_c(t)$ steht!

Bemerkung: Die Mengen, auf denen f konstant ist (hier die H_c aus (a)), heißen *Höhen-* oder *Nivaulinien* von f. Warum war zu erwarten, dass der Gradient von f senkrecht auf den Höhenlinien steht? (In welche Richtung zeigt der Gradient?)

Aufgabe 3: *Bestimmung von Extrema*

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$. Zeigen Sie: f besitzt unendlich viele lokale Maxima, aber kein lokales Minimum.

Aufgabe 4: *Optimierungsproblem*

Beweisen Sie durch die Analyse der Extrema einer geeigneten Funktion $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$: Bei gegebenem Volumen V hat der Würfel unter allen Quadern die kleinste Oberfläche O.