MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1: *Zusammenhänge zwischen totaler und partieller Differenzierbarkeit sowie Stetigkeit*

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ eine Ableitung besitzt (also insbesondere partiell differenzierbar ist), aber nicht total differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber die Ableitungen nach x und y nicht vertauschen. Ist $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y} f)$ in $(0,0)$ stetig?

Aufgabe 2: *Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Richtungsableitungen*

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels: Wenn alle Richtungsableitungen von f im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ existieren, dann ist f stetig in a.

(b) Zeigen Sie: Ist f in a total differenzierbar, so ist die Richtungsableitung von f in Richung v gegeben durch:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathrm{grad} f(a) \cdot v.$$

Hierbei bezeichnet $\cdot$ die Matrizenmultiplikation zwischen einem Zeilenvektor und einem Spaltenvektor.

Aufgabe 3: *Berechnung von Ableitungen im mehrdimensionalen Fall*

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen f, g, h total differenzierbar in ihrem Definitionsbereich sind und berechnen Sie die Ableitung:

(a) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen, sowie $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax = 0\}$ die Menge der Nullstellen der quadratischen Form $x^T Ax$. Definiere dann:

$$f : \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{N} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^T Ax}.$$

(b) Sei $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Definiere hiermit:

$$g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = F(\|x\|_2).$$

(c) Sei $h : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Diese Abbildung definiert die *Kugelkoordinaten* im $\mathbb{R}^3$. (Für jeden Punkt $x = (r, \vartheta, \varphi)$ liegt $h(x)$ auf der Oberfläche der Kugel mit Radius r.) Sie wird Ihnen im weiteren Verlauf der Vorlesung noch öfter begegnen.