

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl
Blatt 4

Aufgabe 1: Äquivalenz der p -Normen

Die p -Normen sind auf $\mathbb{R}^n$ für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ definiert als:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei x_i , $i = 1, \dots, n$, die Komponenten von x sind.

- (a) Sei $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}$. Zeigen Sie: $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$.
- (b) Zeigen Sie, dass alle p -Normen (auch $p = \infty$) äquivalent sind. Das heißt, für alle $p, q \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ gibt es positive Konstanten c_1, c_2 mit

$$c_1 \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq c_2 \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Geben Sie solche Konstanten explizit an! (Die bloße Existenz wurde bereits in der Vorlesung gezeigt.)

Tipp: Beginnen Sie damit, die Äquivalenz einer beliebigen p -Norm mit $\|\cdot\|_\infty$ zu zeigen!

Aufgabe 2: Zwischenwertsatz für den $\mathbb{R}^n$

Seien $\bar{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$ der abgeschlossene Ball mit Radius r bzgl. der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ sowie $f : \bar{B}_r \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es seien weiterhin $a, b \in \bar{B}_r$ mit $f(a) > 0$ sowie $f(b) < 0$. Beweisen Sie: Es existiert ein Punkt $c \in \bar{B}_r$ mit $f(c) = 0$.

Tipp: Legen Sie eine stetige Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{B}_r$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ durch die Punkte a, b und führen Sie die Aussage auf den Zwischenwertsatz für $\mathbb{R}$ aus Analysis I zurück!

Aufgabe 3: Charakterisierung der Stetigkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Sei $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_a) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_b)$. In Koordinatendarstellung hat f dann die Form $f = (f_1, \dots, f_m)$, wobei $f_i : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_a) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $i = 1, \dots, m$. Beweisen Sie folgende Aussage: f ist stetig genau dann, wenn alle f_i stetig bzgl. $|\cdot|$ sind.

Hinweis: Verwenden Sie das Folgenkriterium für Stetigkeit sowie die Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{R}^k$!

Aufgabe 4: Stetigkeitstest

Untersuchen Sie folgende Funktionen mit Hilfe des Folgenkriteriums auf Stetigkeit:

(a)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

- (c) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *partiell stetig* im Punkt (x_0, y_0) , wenn $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y_0)$ und $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x_0, y)$ in x_0 bzw. y_0 stetig sind. Offenbar sind stetige Funktionen auch partiell stetig (warum?). Gilt auch die Umkehrung? Beweisen oder widerlegen Sie:

$$f \text{ partiell stetig} \implies f \text{ stetig}$$