MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 3

Aufgabe 1: *Normen*

(i) Prüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $||\cdot||_. : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm ist. Dabei seien $x \in \mathbb{R}^n$, x_j für $j = 1, ..., n$ die Komponenten von x sowie $|\cdot|$ der Betrag einer reellen Zahl.

(a) $||x||_a := \sup\limits_{1\leq j\leq n} \{|x_j|\}$

(b) $||x||_b := \sum_{j=1}^n |x_j|$

(c) $||x||_c := \sum_{j=1}^n (x_j)^2$

(ii) Sei $n = 2$. Zeichnen Sie die Einheitskreise $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_. = 1\}$ derjenigen Abbildungen aus (i), die eine Norm sind. Veranschaulichen Sie graphisch, dass jeweils ein Ball $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_. < r\}$ bzgl. der einen Norm in denjenigen der anderen passt, sowie umgekehrt.

Bemerkung: Damit haben Sie die Äquivalenz dieser Normen auf $\mathbb{R}^2$ graphisch gezeigt. Sie wird noch allgemeiner in der Vorlesung bewiesen.

Aufgabe 2: *Verallgemeinerung topologischer Standardsätze aus Analysis I für normierte Räume*

Verallgemeinern Sie folgende Aussagen, die schon in Analysis I für den normierten Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bewiesen wurden, für allgemeine normierte $\mathbb{C}$-Vektorräume $(V, ||\cdot||)$:

(a) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ Cauchyfolgen bzgl. $||\cdot||$. Dann ist auch $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Cauchyfolge bzgl. $||\cdot||$.

(b) Beliebige Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen bzgl. $||\cdot||$ sind offen bzgl. $||\cdot||$.

(c) Beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen bzgl. $||\cdot||$ sind abgeschlossen bzgl. $||\cdot||$.

Tipp: Überlegen Sie, welche Ersetzungen nötig sind, damit die alten Beweise nur mit minimalen Änderungen auch hier gültig sind!

Aufgabe 3: *Grundbegriffe der Topologie für* $\mathbb{R}^n$

Bestimmen Sie Rand, Inneres und Abschluss der folgenden Teilmengen:

(a) $(a, b] \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}$,

(c) $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardmetrik von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4: *Gegenbeispiel zum Satz von Bolzano-Weierstrass, falls die Voraussetzungen verletzt sind*

Sei X eine Menge. Die *diskrete Metrik* d auf X wurde in der Vorlesung definiert durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \qquad \text{für alle } \; x, y \in X.$$

(a) Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall das Intervall $[0, 1]$ zwar abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

(b) Laut dem Satz von Bolzano-Weierstrass gilt "kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschlossen und beschränkt". Was ist hier anders, sodass diese Aussage nicht gilt?