Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1: *Eigenschaften selbstadjungierter und unitärer Abbildungen*

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum, $A : V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung sowie $U : V \to V$ eine unitäre Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Für Eigenwerte λ von U gilt: $|\lambda| = 1$.

(b) Die Abbildung $\exp(-iAt) : V \to V$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ unitär.

Erinnerung: $\exp(-iAt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^k A^k}{k!}$, wobei Konvergenzfragen unwichtig sind, da A als Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum automatisch beschränkt ist und somit $k!$ im Nenner die Konvergenz erzwingt.

(c) Man kann A schreiben als

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle b_k, \cdot\rangle b_k,$$

wobei $\{b_k\}_{k=1}^n$ eine Orthonormalbasis von V ist und $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ die Eigenwerte von A sind (sie müssen nicht alle verschieden sein).

Aufgabe 2: *Polarisationsidentität*

Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum und $||\cdot||$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm, $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(a) Zeigen Sie die Identität

$$\langle x, y\rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}.$$

Bemerkung: Diese sog. “Polarisationsidentität” zeigt, dass man das Skalarprodukt aus der zugehörigen Norm rekonstruieren kann.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Norm an, für die $\frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$ kein Skalarprodukt ist!

Aufgabe 3: *Abstrakte und konkrete Metriken*

(i) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Abbildungen $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sind für $i = 1, 2$ Metriken.

(a) $d_1(x, y) = (x - y)^2$,

(b) $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

(ii) *Real-life-Metriken:*

(a) Betrachten Sie die Fahrpläne der deutschen Bahn (Sie können ruhig die Webseite `www.bahn.de` benutzen!). Zeigen Sie: Die kürzestmögliche planmäßige Fahrzeit zwischen zwei Städten innerhalb von 24 Stunden definiert keine Metrik.

(b) Betrachten Sie eine Gruppe befreundeter Personen in Facebook. Sie sei derart, dass alle Personen über Ecken befreundet sind. (Jede Person ist nach einem alten Sprichwort "sich selbst am nächsten", also ihr eigener Freund.) Finden Sie eine Metrik für Facebook!

Sie dürfen Ihre Antworten wahlweise in Formeln formulieren oder in Worten ausdrücken. Achten Sie in beiden Fällen auf logische Präzision!

Aufgabe 4: *Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bzgl. einer Klasse von Metriken*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende und stetige Funktion. Betrachten Sie die Abbildung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$.

(a) Zeigen Sie, dass durch d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

(b) Beweisen Sie:

$$f \text{ beschränkt } \Rightarrow (\mathbb{R}, d) \text{ ist nicht vollständig.}$$

(c) Beweisen Sie nun, dass dagegen folgendes gilt:

$$f \text{ nach oben und unten unbeschränkt } \Rightarrow (\mathbb{R}, d) \text{ ist vollständig.}$$

Hinweis: Führen Sie die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, d)$ auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bezüglich der Standardmetrik zurück. Verwenden Sie an geeigneter Stelle die Surjektivität von f, die sich aus der Unbeschränktheit und Stetigkeit ergibt.

Abgabe bis Montag, 4.11.2013, 12 Uhr