MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/2014

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 1

Aufgabe 1: *Ein Skalarprodukt für Matrizen*

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Man definiert die *Spur* von A als die Summe aller diagonalen Elemente. Die Notation dafür ist $\operatorname{tr}(A)$ (trace ist das englische Wort für Spur). Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist also $\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Sei V der Vektorraum aller reellen 2×2 Matrizen. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(AB^t)$$

definierte Abbildung, wobei B^t die transponierte Matrix von B ist.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(ii) Finden Sie eine bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonale Basis von V.

(iii) Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Konstruieren Sie eine Abbildung $f : V \to \mathbb{R}^4$, die das Skalarprodukt erhält, d.h. einen Isomorphismus f, sodass für alle $A, B \in V$ gilt:

$$\langle A, B \rangle = (f(A), f(B))$$

Bemerkung: Ein Isomorphismus, der das Skalarprodukt erhält, heißt *Isometrie* (iso=gleich, metrie=Metrik). Der Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und *Metrik* bzw. *Norm* wird in der Vorlesung vorgestellt.

Aufgabe 2: *Orthogonalisierungsverfahren*

In dieser Aufgabe wird ein Verfahren beschrieben, mit dem man ausgehend von einer beliebigen Basis eine Orthogonalbasis konstruieren kann. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $u \in V$, $u \neq 0_V$. Man definiert die *Projektion* auf den von u erzeugten Untervektorraum als $P_u(v) := \frac{\langle u,v \rangle}{\langle u,u \rangle} u$ für $v \in V$. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Wir definieren n Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &:= v_1, \\ u_2 &:= v_2 - P_{u_1}(v_2), \\ u_3 &:= v_3 - P_{u_1}(v_3) - P_{u_2}(v_3), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemein $u_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{u_i}(v_k)$, für $k = 1, \ldots, n$. Dies wird *Gram-Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren* genannt.

(i) Zeigen Sie, dass $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Orthogonalsystem ist und dass für jedes $k = 1, \ldots, n$ die Mengen $\{v_1, \ldots, v_k\}$ und $\{u_1, \ldots, u_k\}$ denselben Unterraum erzeugen.

(ii) Sei nun V der Vektorraum aller reellen Polynome auf $[-1, 1]$ vom Grad ≤ 3 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Die Menge $\{1, x, x^2, x^3\}$ ist eine (nicht-orthogonale) Basis von V. Konstruieren Sie aus dieser Basis mit Hilfe des oben beschriebenen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthogonalbasis von V!

Bemerkung: Sie werden die ersten vier *Legendre-Polynome* (modulo Multiplikation mit Konstanten) finden.

Aufgabe 3: *Eigenschaften selbstadjungierter und unitärer Abbildungen*

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $A : V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung. (Ein *unitärer Vektorraum* ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Eigenwerte von A sind reell.

Bemerkung: Diese Tatsache wird in der Quantenmechanik (QM) verwendet, wo die sog. "Observablen" (mathematische Objekte, die die Statistik von Experimenten modellieren) selbstadjungierte Operatoren sein sollen. Die Postulate der QM sind dann so, dass die Eigenwerte der "Observablen" die physikalischen Messwerte angeben.

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen senkrecht aufeinander.

(c) Die Menge der unitären Matrizen von $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bildet eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation, die sog. *unitäre Gruppe* $U(n)$.

Aufgabe 4: *Charakterisierung von Eigenvektoren selbstadjungierter Abbildungen zu größtem und kleinstem Eigenwert*

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum sowie $f : V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung. Sie habe die Eigenwerte $\lambda_1 < ... < \lambda_r$. Seien $v, w \in V$ Vektoren der Länge 1, d.h. $\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle w, w\rangle} = 1$. Zusätzlich gelte

$$\langle v, f(v)\rangle \leq \langle u, f(u)\rangle \leq \langle w, f(w)\rangle \quad \forall u \in V \text{ mit } \sqrt{\langle u, u\rangle} = 1.$$

Zeigen Sie: v bzw. w sind Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_r.

Abgabe bis Montag, 28.10.2013, 12 Uhr