MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WiSe 2013/14

Probeklausur zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine stetige Abbildung komponentenweise stetig ist. Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(x) \ .$$

Hier bezeichnet f_j die j-te Komponente von f.

Summe und Produkte stetiger Funktionen sind stetig (Vorlesung). Damit ist die genannte Funktion stetig.

(b) Gegeben seien zwei aufeinander senkrechte Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^m$, jeweils ungleich dem Nullvektor.

Sei $f(x) = 0$ auf einer beliebigen Menge A und $f(x) = a$ auf dem Komplement von A, $g(x) = 0$ auf einer Menge B und $g(x) = b$ auf dem Komplement von B.

Offensichtlich sind f und g jeweils nicht stetig. Das Skalarprodukt von f und g ist jedoch immer Null, da ja a senkrecht auf b steht. Somit ist $h \equiv 0$ und dadurch stetig.

Aufgabe 2

Die kritischen Punkte sind die Nullstellen des Gradienten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-x^2-y^2} - 2x(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2} = 2x(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2} - 2y(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2} = 2y(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Die e-Funktion ist niemals Null. Die Nullstellen erfüllen also

$$\begin{aligned} I: &\quad 2x(1-x^2+y^2) = 0 \\ II: &\quad 2y(-1-x^2+y^2) = 0 \ . \end{aligned}$$

Die Gleichungen bestehen aus je 2 Faktoren, die jeweils Null werden können. Man erhält also vier Fälle:

1. Fall: $x = 0$, $y = 0$.
2. Fall: $x = 0$, $-1 + y^2 = 0$, also $y = \pm 1$.
3. Fall: $y = 0$, $1 - x^2 = 0$, also $x = \pm 1$.
4. Fall: $1 - x^2 + y^2 = 0$ und $-1 - x^2 + y^2 = 0$. Durch Subtrairen der beiden Gleichungen erhält man $2 = 0$, also sie sind nie gleichzeitig erfüllt.

Insgesamt gibt es also fünf kritische Punkte: $K_1 = (0,0)$, $K_2 = (0,1)$, $K_3 = (0,-1)$, $K_4 = (1,0)$ und $K_5 = (-1,0)$.

Für die Unterscheidung, welcher Art die krit. Punkte sind, wird die Hessematrix benötigt. Diese erhält man durch Ableitung des transponierten Gradienten.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\right) \\
&= 2(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} - 4x^2e^{-x^2-y^2} - 4x^2(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \\
&= \left(2 - 2x^2 + 2y^2 - 4x^2 - 4x^2 + 4x^4 - 4x^2y^2\right)e^{-x^2-y^2} \\
&= \left(2 - 10x^2 + 2y^2 + 4x^4 - 4x^2y^2\right)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2x(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\right) \\
&= 4xye^{-x^2-y^2} - 4xy(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \\
&= 4xy(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2y(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\right) \\
&= 2(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} + 4y^2e^{-x^2-y^2} - 4y^2(-1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \\
&= (-2 - 2x^2 + 2y^2 + 4y^2 + 4y^2 + 4y^2x^2 - 4y^4)e^{-x^2-y^2} \\
&= (-2 - 2x^2 + 10y^2 + 4y^2x^2 - 4y^4)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

Da die zweiten Ableitungen der Funktion stetig sind, ist die Hessematrix symmetrisch und deshalb eine Berechnung von $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nicht notwendig.

Da die Nebendiagonalelemente den Faktor xy erhalten und an allen kritischen Punkten x und/oder y gleich Null sind, ist die Hessmatrix an den krit. Punkten diagonal. Einsetzen ergibt:

$$H_f(K_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(K_2) = \begin{pmatrix} 4/e & 0 \\ 0 & 4/e \end{pmatrix}$$

$$H_f(K_3) = \begin{pmatrix} 4/e & 0 \\ 0 & 4/e \end{pmatrix}$$
$$H_f(K_4) = \begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & -4/e \end{pmatrix}$$
$$H_f(K_5) = \begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & -4/e \end{pmatrix}$$

Die Punkte K_2 und K_3 sind also lokale Minima, da die Hessematrix dort positiv definit ist, die Punkte K_4 und K_5 sind Maxima, da die Hessematrix dort negativ definit ist. Bei K_1 ist die Hessematrix indefinit, somit ist hier ein Sattelpunkt.

Aufgabe 3

Für die Bestimmung der Extrema muss zunächst eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gefunden werden, so, dass die Menge A eine Höhenlinie von g ist.

$$g(x, y) = x^2 + y^2/3.$$

Für die kritischen Punkte gilt: $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} g$ also $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, 2y^3) = \lambda(2x, \frac{2}{3}y).$$

Man erhält drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} I: \quad && 2x &= \lambda \cdot 2x \\ II: \quad && 2y^3 &= \lambda \cdot \frac{2}{3}y \\ III: \quad && x^2 + y^2/3 &= 1. \end{aligned}$$

Achtung: Bei der Lösung die Nulllösungen nicht vergessen!

1. Fall: $x = 0$. Aus III folgt $y = \pm\sqrt{3}$. II ist durch geeignetes λ lösbar.

2. Fall: $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

2. Fall a): $y = 0$, dann sind für $x = \pm 1$ alle Gleichungen erfüllt.

2. Fall b): $y \neq 0 \Rightarrow$ aus II wird $3y^2 = 1$, also $y = \pm\sqrt{3}/3$. Mit III folgt, dass $x^2 + 1/9 = 1$, also ist $x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Man erhält also acht kritische Punkte, hier der Reihenfolge nach gegen den Uhrzeigersinn sortiert: $K_1 = (1, 0)$, $K_2 = (\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$, $K_3 = (0, \sqrt{3})$, $K_4 = (\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$, $K_5 = (-1, 0)$, $K_6 = (-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$, $K_7 = (0, -\sqrt{3})$ und $K_8 = (-\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

Die entsprechenden Funktionswerte sind $f(K_1) = 1$, $f(K_2) = 17/18$, $f(K_3) = 9/2$, $f(K_4) = 17/18$, $f(K_5) = 1$, $f(K_6) = 17/18$, $f(K_7) = 9/2$ und $f(K_8) = 17/18$.

Das globale und somit lokale Maximum ist somit an den Punkten K_3 und K_7. Das globale und somit lokale Minimum ist somit an den Punkten K_2 und K_4, K_6 und K_8. An den anderen beiden Punkten befinden sich lokale Maxima: Dies sieht man daran, dass die Funktionswerte der benachbarten kritischen Punkte jeweils kleiner sind.

Aufgabe 4

a) Da f als Komposition von Polynomen und e-Funktion stetig differenzierbar ist, ist es genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial (f_a)_x}{\partial y} = \frac{\partial (f_a)_y}{\partial x}$$

erfüllt ist. Also:

$$\frac{\partial (f_a)_x}{\partial y} = (x-a)e^{-x-y} = (-1+x)e^{-x-y} = \frac{\partial (f_a)_y}{\partial x} \ .$$

Somit ist genau für $a = 1$ die Bedingung erfüllt und f_a ist dann ein Gradientenfeld.

b) Für f_1 soll das Potential gefunden werden. Dazu könnte man f_1 von $(0,0)$ ausgehend entlang einer Gerade bis (x,y) aufintegrieren. Alternativ kann man bei einer so einfachen Funktion auch direkt das Potential bestimmen. Die y-Ableitung des Potentials soll $-xe^{-x-y}$ ergeben. Das heißt, die Funktion $V(x,y) = xe^{-x-y}$ kommt in Frage. Überprüfen der x-Ableitung liefert, dass V in der Tat das gesuchte Potential ist.