MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

# Musterlösung für die Nachklausur zur Analysis II

**Aufgabe 1**
Gilt folgende Aussage? Eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x_0$ auch stetig. Beweisen Sie ihre Antwort!

**Lösung:** Nein, die Aussage gilt nicht.

**Gegenbeispiel:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten $x_0 = (0,0)$. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x f(0,0) = 0.$$

Aufgrund der Symmetrie von $f$ in $x, y$ folgt $\partial_y f(0,0) = 0$. Insbesondere ist $f$ also in $x_0$ partiell differenzierbar.
$f$ ist aber in $x_0$ nicht stetig, da z.B.

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n, 1/n) = \lim_{n\to\infty} 1 \neq 0 = f(0,0).$$

**Bepunktungsvorschlag:** 1 Punkt für die korrekte Beurteilung, ob die Aussage gilt, 3 Punkte fürs Aufschreiben einer Funktion, die tatsächlich partiell diffbar, aber nicht stetig ist, 3 Punkte für den Nachweis der partiellen Diffbarkeit, 3 Punkte für den Nachweis der Unstetigkeit.

**Aufgabe 2**
Beweisen Sie: Wegintegrale im $\mathbb{R}^n$ über Gradientenvektorfelder sind nur abhängig vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, nicht vom Weg selbst.

**Lösung:** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenvektorfeld, d.h. es existiere eine differenzierbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$(\operatorname{grad} V)^T = f.$$

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve mit $\gamma(a) = x_0,\ \gamma(b) = x_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle f, ds\rangle &= \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \langle (\operatorname{grad} V(\gamma(t)))^T, \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \operatorname{grad} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \left[\frac{d}{dt} V(\gamma(t))\right] dt
\end{aligned}$$

Nun ist $V \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine eindimensionale differenzierbare Funktion. Daher können wir den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung benutzen und erhalten:

$$\int_\gamma \langle f, ds\rangle = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) = V(x_1) - V(x_0),$$

was unabhängig von $\gamma$ ist.

**Bepunktungsvorschlag:** 3 Punkte für die korrekte Formalisierung des Problems (also etwa der Text bis zur ersten Zeile in der Gleichungskette), 3 Punkte für die korrekte Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel, 3 Punkte für die korrekte Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und die Einsicht, dass man das Problem auf den eindimensionalen Fall zurückführen kann, ein Punkt für das Ergebnis des Wegintegrals $(V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)))$. (Den letzten Punkt gibt es auch, wenn man $V$ überhaupt definiert hat und sich einfach daran erinnert.)
Sonst können hier die 10 Punkte auch flexibler vergeben werden, je nach Sauberkeit und Korrektheit des Beweises.

**Aufgabe 3**

Sei $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ die obere Hälfte der Einheitskugel und

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xe^{-z} \\ -ye^{-z} \\ e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld. Berechnen Sie das Integral

$$I_1 = \int_H \langle F, n\rangle d^2r,$$

wobei $n$ das äußere Normalenvektorfeld sei.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass $I_1 = -I_2$ gilt, wobei

$$I_2 = \int_K \langle F, n\rangle d^2r$$

und $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ die Kreisfläche in der $xy$-Ebene bezeichnet. Wenden Sie dazu den Satz von Gauß auf $H \cup K$ an (Skizze)! Berechnen Sie schließlich den Wert von $I_2$ direkt mithilfe elementarer Flächenintegration!

**Lösung:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = \partial_x(xe^{-z}) + \partial_y(-ye^{-z}) + \partial_z(e^{x^2+y^2}) \\ &= e^{-z} - e^{-z} + 0 = 0. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist also divergenzfrei!

Mithilfe einer Skizze (oder auch durch Überlegung) sieht man, dass $H \cup K$ eine geschlossene Fläche ist. Wir können also den Satz von Gauß anwenden, der in seiner allgemeinen Form lautet:

$$\int_{\partial V} \langle F, n\rangle d^2r = \int_V \operatorname{div} F\, d^3r.$$

Als das Volumen $V$ wählen wir nun dasjenige $V$, wofür $\partial V = H \cup K$. Damit erhalten wir:

$$\int_{H\cup K} \langle F, n\rangle d^2r = 0.$$

Daher und aufgrund der Orientierungskonvention folgt:

$$\int_H \langle F, n\rangle d^2r = -\int_K \langle F, n\rangle d^2r \quad \Leftrightarrow \quad I_1 = -I_2.$$

Schließlich berechnen wir den Wert von $I_2$ mithilfe elementarer Flächeninegration. Hierzu stellen wir zunächst fest, dass auf $K$ gilt: $n = (0,0,-1)^T$. Damit:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_K \langle F, n\rangle d^2r \ = \ -\int_K e^{x^2+y^2} d^2r \\ &\overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} -\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi\ re^{r^2} \\ &= -\pi \int_0^1 dr\, \frac{d}{dr} e^{r^2} \ = \ -\pi\ e^{r^2}\Big|_0^1 \\ &= -\pi(e-1) \end{aligned}$$

Daher ist das Ausgangsintegral $I_1 = \pi(e-1)$.

**Bepunktungsvorschlag:** 1 Punkt für die Berechnung der Divergenz. 1 Punkt fürs Erkennen, dass $H \cup K$ eine geschlossene Fläche ist. 2 Punkte fürs korrekte Anwenden des Satzes von Gauß (oder dessen korrekte allgemeine Form). 2 Punkte für den Beweis, dass $I_1 = -I_2$, 1 Punkt für das richtige äußere Normalenvektorfeld auf $K$, 3 Punkte für die Berechnung des Integrals $I_2$.

**Aufgabe 4**
Sei $A$ die Zylinderfläche (ohne Grund- und Deckfläche), die die $z$-Achse umkreist und auf der Ebene $\{z=0\}$ steht, mit Radius $R>0$ und Höhe $h>0$.

a) Geben Sie eine Parametrisierung von $A$ an.

b) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_A \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r,$$

für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (xz, yz, 123)$.

**Lösung:**

a) Eine mögliche Parametrisierung ist $\phi(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$, für $(\varphi, z) \in [0, 2\pi) \times [0, h]$. (Die Höhe wird durch $z$ gegeben; für fixes $z$ wird der Zylinder ein zur $x$-$y$-Ebene paraleller Kreis, den man wie beim Polarkoordinaten mit Winkel $\varphi$ und Radius $R$ beschreibt). $\phi : [0, 2\pi) \times [0, h] \to A$ ist bijektiv.

b) (a) *1. Methode* Das Flächenintegral berechnen wir mit Hilfe der Parametrisierung $\phi$:

$$\begin{aligned}
\int_A \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r &= \int_0^{2\pi}\int_0^h \langle F\circ\phi, n\rangle \|\partial_\varphi\phi \times \partial_z\phi\| \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h \langle F\circ\phi, \partial_\varphi\phi \times \partial_z\phi\rangle \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h \left\langle \begin{pmatrix} zR\cos\varphi \\ zR\sin\varphi \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h zR^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^h zR^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = R^2 2\pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=h} = h^2\pi R^2.
\end{aligned}$$

(b) *2. Methode (Gauß)* **Alternativ** könnte man den Satz von Gauß anwenden. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass der Satz von Gauß nur für geschlossenen Flächen gilt. Daher muss man die Integrale auf der Grund- und Deckfläche auch berücksichtigen. Sei $Z$ der Zylinder (Volumen). Dann ist $\partial Z = A \cup D_1 \cup D_2$, wobei $D_1$, $D_2$ die Grund- bzw. Deckfläche sind. Wir merken nun, dass die Integrale auf $D_1$ und $D_2$ sich ausgleichen, da die Normalenvektoren paralell zur $z$-Achse sind, aber in gegenseitigen Richtungen zeigen, und die dritte Komponente von $F$ konstant ist:

$$\begin{aligned}\int_{D_1} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r + \int_{D_2} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r &= \int_{D_1} \left\langle F, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}^2 r + \int_{D_2} \left\langle F, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}^2 r \\ &= \int_{D_1} 123 \mathrm{d}^2 r + \int_{D_2} -123 \mathrm{d}^2 r = 123(\pi R^2 - \pi R^2) = 0.\end{aligned}$$

Das heisst, $\int_{\partial Z} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r = \int_A \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r + \int_{D_1} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r + \int_{D_2} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r = \int_A \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r$. Für das Integral $\int_{\partial Z} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r$ können wir den Satz von Gauß anwenden, da $\partial Z$ eine geschlossene Fläche ist. Als Parametrisierung von $Z$ nehmen wir $\Phi(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$, $(\rho, \varphi, z) \in (0, R] \times [0, 2\pi) \times [0, h]$.

$$\begin{aligned}\int_{\partial Z} \langle F, n\rangle \mathrm{d}^2 r &= \int_Z \operatorname{div} F \mathrm{d}^3 r \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h (\operatorname{div} F) \circ \Phi |\det J_\Phi| \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h 2z\rho \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho \\ &= 2\frac{R^2}{2}\frac{h^2}{2} 2\pi = h^2 \pi R^2.\end{aligned}$$

**Bepunktungsvorschlag:** (a) sollte 4 Punkte und (b) 6 Punkte vergeben. In (a), eine richtige Parametrisierung vom Zylinder (bis auf Nullmengen) anzugeben ergibt 3 Punkte. Alle 4 Punkte bekommt man, falls die Parametrisierung tatsächlich injektiv ist. In (b) mit der ersten Methode: 2 Punkte für die Anwendung der Parametrisierung im Integral, 2 Punkte für die Berechnung von $n$ bzw. von $\partial_\varphi \phi \times \partial_z \phi$, 2 weitere Punkte für die Berechnung des Integrals. Mit der 2. Methode: 1 Punkt für die Formulierung des Satzes. 2 Punkte für die Umformulierung des Problems für die geschlossene Fläche. 3 weitere Puntke für die Berechnung des Integrals.

**Aufgabe 5**
Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der unten angegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Benennen Sie, falls existent, das globale Maximum und das globale Minimum von $f$.

$$f(x, y) := \exp(x^2 + y^2 + xy) \ .$$

**Lösung:** Die Funktion $f$ ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Daher gilt $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0, 0)$ an jedem Extremalpunkt $(x_0, y_0)$. Wir berechnen

$$\operatorname{grad} f(x, y) = e^{x^2+y^2+xy}(2x + y, 2y + x).$$

Da $e^{x^2+y^2+xy}$ immer ungleich Null ist, wird $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$ genau dann wenn

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Der einzige Kandidat für Extremalpunkt ist dann $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Jetzt zeigen wir, dass $(0, 0)$ tatsächlich ein Extremalpunkt ist.

Dafür berechnen wir die Hessematrix von $f$

$$H_f(x, y) = e^{x^2+y^2+xy} \begin{pmatrix} 2 + (2x + y)^2 & 1 + (2x + y)(2y + x) \\ 1 + (2x + y)(2y + x) & 2 + (2y + x)^2 \end{pmatrix}.$$

Am Punkt $(0, 0)$ ist $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ definit positiv (die Eigenwerte sind 3 und 1, beide positiv). Das bedeutet, dass $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 1)$ ein lokales Minimum ist (und weil $f$ keine weitere Extrema hat, ist es auch global).

In dem Fall könnte man auch direkt (ohne die Hessematrix) argumentieren: Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, gilt es, für jeden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^{x^2+y^2+xy} \geqslant e^0 = f(0, 0)$ (da $x^2 + y^2 + xy = (x + y)^2 \geqslant 0$ gilt). Das heißt, $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 1)$ ist ein globales (und somit auch lokales) Minimum.

**Bepunktungsvorschlag:** 1 Punkt für die notwendige Bedingung für Extremalpunkte, 2 Punkte für das Gleichungssystem, 2 Punkte für die Lösung des Systems. Falls man weiter mit der Hessematrix argumentiert, könnte man 1 Punkt für die Hessematrix bekommen, 2 Punkte für den Zusammenhänge zwischen Art von Matrix und Extremalpunkte zu nennen, 1 Punkt für die definite Positivität und den letzten Punkt fürs Argumentieren, dass es auch global ist. Argumentiert man ohne Hessematrix, so könnte man 3 Punkte für den Beweis, dass $f(x, y) \geqslant f(0, 0)$ bekommen, und 2 weitere für die Schlussfolgerung.