MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Musterlösung für die Klausur zur Analysis II

Aufgabe 1

(a) *Zur totalen Diffbarkeit:* Zunächst sollte man sich den Kandidaten für die totale Ableitung beschaffen (oder raten). Das geht durch Ausrechnen der partiellen Ableitungen mithilfe der Definition:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(0+\varepsilon, 0) - f(0,0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{0-0}{\varepsilon} = 0.$$

Durch Vertauschung von x und y erhält man $\partial_y f(0,0) = (0,0)$. Falls f also in $(0,0)$ total diffbar ist, lautet die Ableitung $Df(0,0) = (0,0)$.
Nun zeigen wir, dass dies tatsächlich der Fall ist. Dazu muss gelten:

$$L = \lim_{h \to (0,0)} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - Df(0,0)h}{\|h\|} = 0.$$

Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullfolge, $h_n = (h_{1,n}, h_{2,n})$ mit $h_{1,n} \neq 0,\ h_{2,n} \neq 0$.

$$L = \lim_{h \to (0,0)} \frac{h_1 h_2 \sin(\frac{1}{h_1 h_2}) - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Betrachte diesen Ausdruck im Betrag, um Abschätzungen durchführen zu können (er soll ja sowieso Null ergeben):

$$|L| = \lim_{h \to (0,0)} \frac{\left|h_1 h_2 \sin(\frac{1}{h_1 h_2})\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Nun ist $|\sin(a)| \leq 1 \forall a \in \mathbb{R}$, daher folgt:

$$|L| \leq \lim_{h \to (0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Sei nun $m_n = \max\{h_{1,n}, h_{2,n}\}$. Dann gilt:

$$|L| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{|m_n|^2}{\sqrt{m_n^2}} = \lim_{h \to (0,0)} |m_n| = 0.$$

Folglich ist f in (0,0) total differenzierbar mit Ableitung $Df(0,0) = (0,0)$.

(b) *Zur partiellen Diffbarkeit:* Wir zeigen, dass $\partial_x f(x,y)$ nicht stetig in $(0,0)$ ist. Für $x, y \neq 0$ ist f eine Komposition differenzierbarer Funktionen und somit nach den gewohnten Ableitungsregeln diffbar:

$$\partial_x f(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{xy}\right).$$

Der erste Term ist wegen der Beschränktheit des Sinus stetig in $(0,0)$. Für den zweiten Term wählen wir eine Nullfolge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass der Cosinus immer gleich 1 ist. Das ist z.B. der Fall für $x_n y_n = \frac{1}{2n\pi}$, was wiederum durch die durch

$$x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$

gegebene Nullfolge realisiert wird. Für diese Folge gilt:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{x_n} \cos\left(\frac{1}{x_n y_n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{2n\pi} = -\infty.$$

Folglich kann $\partial_x f(x,y)$ in $(0,0)$ nicht stetig sein. Da f symmetrisch in x, y ist, gilt das Gleiche für $\partial_y f(x,y)$.

Aufgabe 2

(a) *Explizite Berechnung:* Eine Parametrisierung von ∂K ist gegeben durch:

$$\Phi(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \;\; t \in (0, 2\pi).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \langle v(\Phi(t)), \Phi'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t, 0)^T, (-\sin t, \cos t, 0)^T \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} \, dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

(b) *Berechnung mit dem Satz von Stokes:* Nach dem Satz von Stokes gilt:

$$I = \int_K \langle \operatorname{rot} v, n \rangle d^2 r,$$

wobei n das Normalenvektorfeld auf K ist. Hier (mit angegebener Orientierungskonvention): $n = e_3 = (0,0,1)^T$. Für das Integral braucht man also die dritte Komponente der Rotation von v:

$$\langle \operatorname{rot} v, e_3 \rangle = (\operatorname{rot} v)_3 = \partial_x v_2 - \partial_y v_1 = \partial_x x - \partial_y(-y) = 2.$$

Folglich:

$$I = \int_K 2 \, d^2 r = 2 \operatorname{vol}_2(K) = 2\pi.$$

Offensichtlich stimmen die beiden Ergebnisse überein, was den Satz von Stokes in dieser Situation verifiziert.

Aufgabe 3

Da die Normen äquivalent sind, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $\| \cdot \|_b \leqslant C \| \cdot \|_a$.

1. Antwort

Sei $\varepsilon > 0$. (z_n) konvergiert gegen z bezüglich $\| \cdot \|_a$, und daher existiert es eine natürliche Zahl N mit $\|z - z_n\|_a < \varepsilon / C$ für $n \geqslant N$. Es gilt also

$$\|z - z_n\|_b \leqslant C\|z - z_n\|_a < \varepsilon,$$

für $n \geqslant N$.

2. Antwort (ohne die ε-N Definition):

Es gilt

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \|z - z_n\|_b \leqslant \lim_{n\to\infty} C\|z - z_n\|_a = C \lim_{n\to\infty} \|z - z_n\|_a = 0,$$

und daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \|z - z_n\|_b = 0$.

Aufgabe 4

a) Man braucht erstmal eine Funktion g, vor der M eine Höhenlinie ist. Wir wählen $g(x,y) = x^2 + 3y^2$, aber diese Funktion plus eine Konstante wäre auch richtig. An den kritischen Punkten von f eingeschränkt auf M ist $\operatorname{grad} f$ parallel zu $\operatorname{grad} g$. Ein kritischer Punkt erfüllt also das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ (x,y) \in M \end{cases} \iff \begin{cases} 2xe^{x^2+6y} & = & \lambda 2x & (1) \\ 6e^{x^2+6y} & = & \lambda 6y & (2) \\ x^2+3y^2 & = & 12 & (3) \end{cases},$$

für eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$. Zwei Fälle:

i. $x = 0$ Aus (3) folgt $y = \pm 2$. Für $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (0,-2)$ ist (1) immer erfüllt und man kann die λ Konstanten finden, für die (2) auch erfüllt ist.

ii. $x \neq 0$ Aus (1) folgt $\lambda = e^{x^2+6y}$. Dies in (2) eingesetzt ergibt $y = 1$, und schießlich mit (3) findet man $x = \pm 3$. Somit hat man zwei weitere kritische Punkte $P_3 = (3,1)$, $P_4 = (-3,1)$.

Insgesamt gibt es also vier kritische Punkte: $P_1 = (0,2)$, $P_2 = (0,-2)$, $P_3 = (3,1)$, $P_4 = (-3,1)$. M ist die Ellipse um der Ursprung mit großer Halbachse auf der x-Achse mit Länge $2\sqrt{3}$ und kleiner Halbasche mit Länge 2. Die vier Punkte nach gegen den Uhrzeigersinn sortiert: P_3, P_1, P_4, P_2. Die Funktionswerte sind $f(P_1) = e^{12}$, $f(P_2) = e^{-12}$, $f(P_3) = f(P_4) = e^{15}$.

b) Das globale und somit lokale Maximum ist somit an den Punkten P_3 und P_4. Das globale und somit lokale Minimum ist somit an P_2. An P_1 befindet sich ein lokales Minimum: Dies sieht man daran, dass die Funktionswerte der benachbarten kritischen Punkte jeweils großer sind.

Aufgabe 5

Sei $G = \operatorname{graph} f = \{(x, y, f(x, y)) (x, y) \in M\}$. Eine Parametrisierung von G ist $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $\phi : M \to G$. Dann ist der Flächeninhalt von G

$$\int_G 1 \mathrm{d}A = \int_M \|\partial_x \phi \times \partial_y \phi\| \mathrm{d}^2(x, y) = \int_M \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1} \mathrm{d}^2(x, y).$$

Das letzte Formel ist aus den Übungen bekannt und somit darf direkt angewendet werden. In diesem Fall wird es

$$\int_M \sqrt{4 + 4 + 1} \mathrm{d}^2(x, y) = \int_M 3 \mathrm{d}^2(x, y).$$

Das letzte Integral kann man durch den Transformationssazt mit den Polarkoordinaten für den Halbkreis M $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $(r, \theta) \in (0, 1) \times (0, \pi)$ berechnen:

$$\int_M 3 \mathrm{d}^2(x, y) = \int_0^1 \int_0^\pi 3 |\det J_\Phi| \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^\pi 3r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \frac{3\pi}{2}.$$

Alternativ könnte man merken, das Integral ist 3-mal den Flächeninhalt von M, und der Flächeninhalt von M ist die Hälfte des Flächeninhalts des Einheitskreises, d.h. $3\frac{1}{2}\pi$.