MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

WiSe 2013/14
15.02.2014

Klausur zur Mathematik III für gymnasiales Lehramt

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

alte LPO ☐ neue LPO ☐

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 100 min

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät (kein Bleistift!)

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, dass die partiellen Ableitungen aber in diesem Punkt nicht stetig sind.

Aufgabe 2. Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad v(x,y,z) = (-y, x, xyz)^T$ ein Vektorfeld. Verifizieren Sie den Satz von Stokes, indem Sie das Arbeitsintegral

$$I = \int_{\partial K} \langle v, ds \rangle$$

einmal explizit und einmal durch Verwendung des Integralsatzes ausrechnen. Hierbei bezeichnet ∂K den Rand der Kreisscheibe $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$. Die Orientierung von K sei so gewählt, dass das Normalenvektorfeld in Richtung der positiven z-Achse zeigt.

Aufgabe 3. Es sei V ein normierter Vektorraum und $\|\cdot\|_a : V \to \mathbb{R}_0^+$ sowie $\|\cdot\|_b : V \to \mathbb{R}_0^+$ zwei zueinander äquivalente Normen auf V.

Sei außerdem $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge von Elementen in V, die in der Norm $\|\cdot\|_a$ gegen ein $z \in V$ konvergiert.

Zeigen Sie: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auch in der Norm $\|\cdot\|_b$ gegen z.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = 12\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = e^{x^2+6y}$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f eingeschränkt auf M und tragen Sie diese in eine Skizze der Menge M ein. Bestimmen Sie die Funktionswerte an den kritischen Punkten.

(b) Entscheiden Sie (mit Begründung), bei welchen Punkten es sich um lokale Maxima, lokale Minima oder Terassenpunkte handelt. Geben Sie das globale Maximum und das globale Minimum an.

Aufgabe 5. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x - 2y$, wobei M die obere Hälfte der Kreisfläche ist: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Graphen von f.