Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 13

Aufgabe 1

(a) Sei f eine monotone Funktion und $g := f^{-1}$ ihre Umkehrfunktion. Beweisen Sie die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion aus der Vorlesung, indem Sie die Gleichung $f(g(x)) = x$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ableiten (Kettenregel).

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$$

(c) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad f(x) = \cos^{-1}(x)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, um Ihr Ergebnis auf eine schöne Form zu bringen. Die Umkehrfunktion des Kosinus, eingeschränkt auf $[0, \pi]$ (Monotonie!), wird übrigens auch Arcus-Kosinus $\arccos = \cos^{-1}$ genannt, die Umkehrfunktion des Sinus, eingeschränkt auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, entsprechend Arcus-Sinus $\arcsin = \sin^{-1}$.

(d) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \cosh^{-1}(x)$$

Hinweis: Der Kosinus Hyperbolicus ist definiert durch $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, analog der Sinus Hyperbolicus durch $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Die Beziehung

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

wird Ihnen helfen, Ihr Ergebnis auf eine schöne Form zu bringen.

(e) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a \text{ mit } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) = x^x$$

Hinweis: Schreiben Sie f und g wie definiert, mithilfe von Exponentialfunktion und Logarithmus.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie durch direkte Anwendung des Differentialquotienten (d.h. ohne Hilfe von Ableitungsregeln), dass die Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, mit der Ableitung $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ist g auch an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 0 \\ \exp(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Aufgabe 3

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist und überprüfen Sie f' in x_0 auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Hinweis: Um die Differenzierbarkeit von f in x_0 zu zeigen, schätzen Sie den Betrag des Differentialquotienten von f an der Stelle x_0 mithilfe der Ungleichung $|\sin(y)| \leq 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$ ab und zeigen Sie, dass gilt $f'(0) = 0$. Berechnen Sie als nächstes $f'(x)$ für $x \neq 0$ und betrachten Sie die Folge $f'(x_n)$ im Limes $n \to \infty$, wobei die Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben ist durch $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} n}$.

Abgabe: Woche ab 04.02.2013.