

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1

- (a) Geben Sie $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ in der Form $x + iy$ an.
- (b) Berechnen Sie $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^6$ in der Form $Re^{i\varphi}$.
- (c) Berechnen Sie i^i .
- (d) Berechnen Sie die Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^2 - 2z + 5$.
- (e) Charakterisieren Sie geometrisch (Skizze) die Mengen

$$\mathcal{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| + |z + 2| = 5\} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1\}$$

in der komplexen Ebene.

- (f) Kann man den Körper \mathbb{C} anordnen?

Aufgabe 2

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ sei $f(z) = \frac{iz - 1}{i - z}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung f injektiv ist.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall stetig ist.

Aufgabe 4

Berechnen Sie für die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} .$$

Bemerkung:

Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: c \in \mathbb{R}$ den *Grenzwert* von f für $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, wenn für *jede* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ die Gleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ erfüllt ist (wie das erste Beispiel zeigt, muss a nicht in D liegen!).

Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: c \in \mathbb{R}$ den *Grenzwert* von f für $x \rightarrow \infty$, wenn für *jede* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ die Gleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ erfüllt ist.

Abgabe: Woche ab 28.01.2013.