

Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 11

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist, wobei $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Bemerkung: Finden Sie zu einem beliebig gewählten $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein passendes $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|x - y| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

- (b) Beweisen Sie durch Widerspruch, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Bemerkung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass g als Polynomfunktion stetig ist.

Aufgabe 2

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([0, 1]) := \{f(x) \mid x \in [0, 1]\} \subseteq [0, 1]$.

- (a) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h., dass es ein $x_0 \in [0, 1]$ gibt mit $f(x_0) = x_0$.
- (b) Sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion mit $g([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Es gelte für f zusätzlich $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [0, 1]$ gibt mit $f(x_0) = g(x_0)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 3

(a) Untersuchen Sie die *Dirichlet-Funktion* $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(b) Untersuchen Sie folgende Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 - x & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass die *Thomaes-Funktion* $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{P} \end{cases}$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ unstetig, dagegen in allen Punkten $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist. Dabei bezeichnet $\mathbb{P} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1) \mid p, q \in \mathbb{N}, \text{ ggt}(p, q) = 1\}$ die Menge der vollständig gekürzten Brüche in $(0, 1)$.

Hinweis:

Bei allen drei Funktionen brauchen Sie für Ihre Argumentation die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt (d.h. für zwei beliebige Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ gibt es $q \in \mathbb{Q}$, sodass $x < q < y$) sowie, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Sie können diese Tatsachen verwenden, um mit dem Folgen-Kriterium oder dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium die Funktionen auf Stetigkeit zu untersuchen. Wenn Sie mit dem Folgen-Kriterium arbeiten beachten Sie, dass Sie eine beliebige Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ immer in eine rationale Teilfolge $(a_{n_r})_{r \in \mathbb{N}}$ und/oder eine irrationale Teilfolge $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ aufspalten können (existiert eine von beiden nicht, so sind nur endlich viele Folgenglieder rational bzw. irrational und spielen damit für die Konvergenzbetrachtungen keine Rolle).

Um die Stetigkeit der Thomaes-Funktion in einem beliebigen irrationalen Punkt x zu beweisen argumentieren Sie, dass aus der Menge der rationalen Zahlen $\frac{p}{q} \in \mathbb{P}$, die in der ε -Umgebung $\mathcal{K}_\varepsilon(x) = \{y \in (0, 1) \mid |x - y| < \varepsilon\}$ von x liegen, mit kleiner werdendem $\varepsilon > 0$ nur noch Zahlen mit zunehmend größeren Nennern q überleben. Die Idee dazu geht so: Argumentieren Sie, dass für ein gegebenes $\delta > 0$ und einem gegebenen maximalen Nenner $q_{\max} \in \mathbb{N}$ nur endlich viele rationale Zahlen in $\mathcal{K}_\delta(x) \cap \mathbb{P}$ liegen, deren Nenner kleiner oder gleich $q_{\max}$ ist. Nehmen Sie nun von diesen endlich vielen rationalen Zahlen diejenige, die den kleinsten Abstand zu x hat und setzen Sie diesen Abstand als ε . Für alle $\frac{p}{q} \in \mathcal{K}_\varepsilon(x) \cap \mathbb{P}$ gilt nun $q > q_{\max}$. Da wir $q_{\max}$ beliebig groß wählen können (wodurch ε immer kleiner wird) zeigt sich somit, dass $\frac{1}{q}$ gegen null strebt, wenn wir mit rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ der irrationalen Zahl x sehr nahe kommen.

Bemerkung: Dass es eine Funktion gibt, die in allen rationalen Punkten unstetig, in allen irrationalen Punkten dagegen stetig ist, ist beachtlich! Umgekehrt lässt sich zeigen, dass es keine Funktion gibt, die in allen rationalen Punkten stetig und in allen irrationalen Punkten unstetig ist. Insgesamt folgt daraus, dass es keine stetige Funktion geben kann, die alle rationalen auf die irrationalen und alle irrationalen auf die rationalen Zahlen abbildet.

Abgabe: Woche ab 21.01.2013.