Übungen zur Analysis einer Variablen

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1

Benutzen Sie nur die Definition der Stetigkeit einer Funktion um die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \ := \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 2 \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

in allen Punkten auf Stetigkeit zu überprüfen.

Bemerkung: Um zu zeigen, dass f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist, wählt man eine *beliebige* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. Um zu zeigen, dass f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig ist, reicht es eine *konkrete* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ zu finden, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ gilt (Gegenbeispiel).

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ stetig in $x_0 = 3$ ist.

Bemerkung: Finden Sie zu einem beliebig gewählten $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein passendes $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|x - 3| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Aufgabe 3

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ streng monoton.}$$

Aufgabe 4

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $p \in \mathbb{R}$ mit $f(p) > 0$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{K}_\delta(p) := \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \delta\}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass die Menge der Nullstellen $\mathcal{N} := \{x \in \mathbb{R} |\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ von f abgeschlossen ist.

Hinweis: Um zu zeigen, dass $\mathcal{N}$ abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ offen ist, d.h. wählen Sie ein beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ und zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ für alle $y \in \mathcal{K}_\delta(x)$ erfüllt ist (dass also x ein innerer Punkt von $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ ist).

Abgabe: Woche ab 14.1.2013.